Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 5: Módulos, II

1. Localización de módulos

1.1. *Localización de módulos.* Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Muestre que existe un A-módulo M_S y un homomorfismo de A-módulos $j_M : M \to M_S$ que satisfacen la siguiente propiedad:

> Para cada homomorfismo $f : M \to N$ con codominio en un A-módulo N para el cual todas las aplicaciones $n \in N \mapsto sn \in N$ con $s \in S$ son isomorfismos, existe un único homomorfismo $\bar{f} : M_S \to N$ tal que $f = \bar{f} \circ j_M$.

(b) El par (M_S, j_M) está determinados a menos de un isomorfismo canónico.

(c) El A-módulo M_S es de forma natural un A_S-módulo.

(d) Si M es un A-módulo tal que para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \to M_S$ es un isomorfismo.

(e) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-modulos, entonces existe un único morfismo $f_S : M_S \to N_S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S \end{tikzcd}$$

Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ para un ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, entonces escribimos $M_\mathfrak{p}$ en vez de M_S.

1.2. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Entonces $M_S = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

De un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

1.3. *Exactitud de la localización.*

(a) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado. Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

(b) En particular, si $M' \subset M$ es un submódulo de un A-módulo M, entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S.

1.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y M un A-módulo.

(a) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P+Q)_S = P_S + Q_S$.

(b) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$.

(c) Si $P \subset M$ es un submódulos, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

1.5. *Propiedades locales.* Sea A un anillo conmutativo.

(a) Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M = 0$;

(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y

(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(b) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectivo;

(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y

(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(c) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es sobreyectivo;

(ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y

(iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(d) Consideremos una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión (1) es exacta.

(ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$, es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$, es exacta.

1.6. *Soporte de un módulo.* Sea A un anillo conmutativo. Si M es un A-módulo, el *soporte de* M es el conjunto

$$\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Muestre que si M es finitamente generado, es

$$\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \subset \operatorname{ann} M\}.$$

2. Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

2.2. Muestre que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es proyectivo.

Sugerencia. Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}| < \infty$. Entonces si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre, M es libre de rango no numerable. Analice ahora el grupo abeliano $M/2M$.

2.3. *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es un par $((x_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \hom_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

(i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y
(ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Nótese que en la segunda condición la suma tiene sentido por la primera condición.

(a) Muestre que un A-módulo P es proyectivo sii posee una base dual.
(b) Muestre que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado sii posee una base dual finita.

2.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S-módulo.
(b) Si M es proyectivo, entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.
(c) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

2.5. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo.

(a) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de A-módulos y homomorfismos de A-módulos que es exacto y en el que cada P_p, $p \geq 0$, es proyectivo. Llamamos a este diagrama una *resolución proyectiva* de M.

(b) De hecho, los A-módulos P_p, $p \geq 0$, pueden elegirse libres.
(c) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A-módulos P_p, $p \geq 0$, pueden elegirse finitamente generados.
(d) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(e) Encuentre resoluciones proyectivas para

(i) un A-módulo proyectivo;

(ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;

(iii) el $k[X]$-módulo $S = k[X]/(X)$.

2.6. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \mathsf{hom}_A(M, A)$ con su estructura de A-módulo a derecha obtenida de la estructura de A-bimódulo de A. Muestre que M es un proyectivo finitamente generado sii M^* lo es.

2.7. $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

2.8. Si A es un dominio de integridad y K es su cuerpo de fracciones, entonces K es un A-módulo inyectivo.

2.9. Sea G un grupo finito y k un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en k. Mustrar que todo $k[Q]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Todo $k[G]$-módulo es necesariamente libre?

2.10. Si A un un anillo de división, todo A-modulo es inyectivo y proyectivo.

3. Condiciones de cadena

3.1. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$.

(a) Un anillo A es nötheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es nötheriano a izquierda.

(b) Un anillo A es nötheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es nötheriano a izquierda.

3.2. Un dominio integro artiniano es un cuerpo.

3.3. *(a)* Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(b) Un grupo abeliano es artiniano y nötheriano sii es finito.

3.4. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Si B es nötheriano a izquierda, entonces A es nötheriano a izquierda.

3.5. *Algebras de matrices.* Sean A y B anillos y M y N un A-B-bimódulo y un B-A-bimódulo, respectivamente. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

el álgebra de matrices. Entonces T es nötheriana a derecha sii A y B son anillos nötherianos a derecha y M es un B-módulo nötheriano y N es un A-módulo nötheriano.

3.6. *Polinomios de Laurent.* Sea k un cuerpo y sea $A = k[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en k. Muestre que A es nötheriano.

Sugerencia. Imite la demostración del teorema de Hilbert para $k[X]$.

3.7. *Extensiones de Ore.* Sea A un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos.

(a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X, \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X; \sigma]$ al anillo correspondiente.

(b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio.

(c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X; \sigma]$ es un dominio de ideales principales.

(d) Si σ es automorfismo y A es nötheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X; \sigma]$ es nötheriano a izquierda (derecha).

3.8. *Extensiones de Ore, II.* Sea A un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos. Una *σ-derivación* de A es un homomorfismo de grupos $\delta : A \to A$ que satisface

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \forall a, b \in A.$$

Si $\sigma = \mathsf{id}_A$, decimos simplemente que δ es una *derivación* de A.

(a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X + \delta(a), \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X; \sigma, \delta]$ al anillo correspondiente.

(b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio.

(c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio de ideales principales.

(d) Si σ es automorfismo y A es nötheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es nötheriano a izquierda (derecha).

3.9. Sea $A = k[X]$, $\sigma = \mathsf{id}_A : A \to A$ y $\delta = \frac{\partial}{\partial X} : A \to A$.

(a) Muestre que δ es una derivación de A.

(b) Muestre que el álgebra de Weyl A_1 es isomorfa a $A[X; \sigma, \delta]$. En particular, concluya que A_1 es nötheriana.

Reinhold Baer
1902–1979, Alemania y Suiza

Los trabajos más importantes de Baer fueron en teoría de grupos. En 1940 introdujo el concepto de módulo inyectivo.