
ÁLGEBRA II
Primer Cuatrimestre — 2007
Práctica 6: Productos tensoriales

1. Productos tensoriales

1.1. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

1.2. Sea A un anillo y M_A y ${}_A M$ A -módulos. Muestre que $M \otimes_A N$ es un $\text{End}_A(M)$ - $\text{End}_A(N)$ -bimódulo.

1.3. Sean A y B anillos y M_A , ${}_A N_B$ y ${}_B P$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

1.4. Sea A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal y M un A -módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

1.5. Sea A un anillo, M_A y ${}_A N$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Si $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

1.6. Sea A un anillo y M un A -módulo playo. Si $N \subset M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

1.7. Si A es un anillo conmutativo y M, N son A -módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A -módulo playo.

1.8. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(a) Si M es un A -módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

(b) El A -módulo derecho A_S es playo.

[†]1.9. Sea A un anillo y M un A -módulo izquierdo. Entonces M es playo si para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ finitamente generado, la aplicación

$$a \otimes m \in \mathfrak{a} \otimes_A M \mapsto am \in \mathfrak{a}M$$

es un isomorfismo.

1.10. Sea A un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Todo A -módulo a izquierda es playo.
- (ii) Todo A -módulo a derecha es playo.
- (iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.
- (iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
- (v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

1.11. *Criterio local de platitud.* Sea A un anillo conmutativo y M un A -módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) M es playo;
- (ii) para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo playo;
- (iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo playo.

1.12. Un anillo conmutativo A es *absolutamente playo* si todos sus módulos son playos.

- (a) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i) A es absolutamente playo.
 - ii) Todo ideal principal de A es idempotente.
 - iii) Todo ideal finitamente generado de A es un sumando directo de A .
- (b) Muestre que un anillo booleano es absolutamente playo.
- (c) Si A es un anillo conmutativo absolutamente playo y $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado, entonces A_S es absolutamente playo.

1.13. *Producto tensorial de álgebras.* Sea k un cuerpo y sean A y B k -álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b' = (aa') \otimes (bb').$$

1.14. Sea k un cuerpo, A una k -álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras

$$\begin{aligned} A[X] &\cong k[X] \otimes_k A, \\ M_n(A) &\cong M_n(k) \otimes_k A, \end{aligned}$$

y

$$M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_k M_m(A).$$

2. Productos de torsión

2.1. Sean M y N grupos abelianos. Consideremos el conjunto

$$G(M, N) = \{(m, k, n) \in M \times \mathbb{Z} \times N : km = 0, kn = 0\},$$

sea $L(M, N)$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por $G(M, N)$ y sea $R(M, N)$ el subgrupo de $L(M, N)$ generado por los elementos

$$\begin{aligned} (m + m', k, n) - (m, k, n) - (m', k, n), & \quad \text{si } km = km' = 0 \text{ y } km = 0; \\ (m, k, n + n') - (m, k, n) - (m, k, n'), & \quad \text{si } km = 0 \text{ y } kn = kn' = 0; \\ (m, kk', n) - (mk, k', n), & \quad \text{si } kk'm = 0 \text{ y } k'n = 0; \\ (m, kk', n) - (m, k, k'n), & \quad \text{si } km = 0 \text{ y } kk'n = 0. \end{aligned}$$

Definimos $M \odot N = L(M, N)/G(M, N)$.

- (a) Si M ó N no posee elementos de orden finito, $M \odot N = 0$
- (b) Hay un isomorfismo $M \odot N \cong N \odot M$.



Hassler Whitney
1907–1989, Estados Unidos-Suiza.

Whitney fue el primero en introducir explícitamente el producto tensorial de grupos abelianos, en *Tensor Products of Abelian Groups*, Duke Math. J. 4, 495–528 (1938).