
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2007

Práctica 7: Teoremas clásicos de estructura

1. Módulos y anillos semisimples

1.1. Sea A un anillo y sea M un A -módulo simple. Entonces o bien M , considerado como grupo abeliano, es isomorfo a una suma directa de copias de \mathbb{Q} , o bien existe $p \in \mathbb{N}$ primo tal que M es, considerado como grupo abeliano, isomorfo a una suma directa de copias de \mathbb{Z}_p .

1.2. Sea A un anillo conmutativo y M y N dos A -módulos. Si alguno de M o N es semisimple, $M \otimes_A N$ es semisimple.

1.3. (a) Si A es un anillo semisimple y $B \subset A$ es un subanillo, ¿es B necesariamente semisimple?

(b) Si A es un anillo semisimple e $I \triangleleft A$ es un ideal bilátero, entonces A/I es semisimple.

1.4. *Anillos de matrices.*

(a) Sean A y B anillos y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $M_m(M_n(A)) \cong M_{mn}(A)$ y $M_n(A \times B) \cong M_n(A) \times M_n(B)$.

(b) Si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A)$ es semisimple.

(c) Sea A un anillo y sea $n \in \mathbb{N}$. Sea P el conjunto de vectores *fila* de n componentes en A y sea Q el conjunto de vectores *columna* de n componentes en A . Entonces P es un A - $M_n(A)$ -bimódulo y Q es un $M_n(A)$ - A -bimódulo con acciones de $M_n(A)$ inducidas por el producto matricial. Más aún, hay un isomorfismo $Q \otimes_A P \cong M_n(A)$ de $M_n(A)$ -bimódulos y un isomorfismo $P \otimes_{M_n(A)} Q \cong A$ de A -bimódulos.

Como consecuencia de esto, si M es un A -módulo izquierdo, entonces

$$P \otimes_{M_n(A)} (Q \otimes_A M) \cong M.$$

(d) Si M es un A - B -bimódulo y N es un B -módulo izquierdo proyectivo, entonces $M \otimes_B N$ es un A -módulo proyectivo.

(e) Sea A un anillo. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n(A)$ es semisimple, entonces el anillo A mismo es semisimple.

1.5. Sea A un anillo, M un A -módulo finitamente generado. Si $B = \text{End}_A(M)$ y A es semisimple, entonces B es semisimple. Notemos que esto tiene como caso particular a la segunda parte del ejercicio **1.4**, ya que si $M = A^n$, entonces $\text{End}_n(M) \cong M_n(A)$.

1.6. (a) Un anillo artiniiano a izquierda sin divisores de cero es un anillo de división.

(b) Si A es un anillo sin divisores de cero tal que $M_n(A)$ es semisimple para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces A es un anillo de división.

2. Álgebras de grupos cíclicos

Si $n \in \mathbb{N}$, sea G_n un grupo cíclico de orden n y sea $g_n \in G_n$ un generador.

- [1] **2.1.** Sea k un cuerpo de característica cero. Si $kG_n \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$ es la factorización de kG_n como k -álgebra dada por el teorema de Wedderburn, de manera que es $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ y D_1, \dots, D_r son k -álgebras de división, entonces $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$ y D_i es un cuerpo para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

En particular, hay exactamente r isoclases de kG_n -módulos simples y si S_1, \dots, S_r son representantes de estas clases, hay un isomorfismo de kG_n -módulos $kG_n \cong \bigoplus_{i=1}^r S_i$.

- [1] **2.2.** Sea k un cuerpo de característica cero. Sea M un kG_n -módulo simple y sea $a : m \in M \mapsto g_n m \in M$ la multiplicación por g_n . Entonces $a \in \text{End}_{kG_n}(M)$ porque kG_n es un anillo conmutativo. Sea $\mu \in k[X]$ el polinomio minimal de a sobre k . Muestre que μ es irreducible en $k[X]$. Además, si $k = \mathbb{Q}$, entonces μ tiene coeficientes enteros.

2.3. Álgebras de grupos cíclicos sobre \mathbb{C} . Sea $\Omega_n \subset \mathbb{C}^\times$ el subgrupo multiplicativo de \mathbb{C}^\times de las raíces n -ésimas de la unidad.

- [1] (a) La aplicación $\phi : \chi \in \text{hom}_{\text{Grp}}(G_n, \Omega_n) \mapsto \chi(g_1) \in \Omega_n$ es un isomorfismo de grupos abelianos. Esto implica que el conjunto $\hat{G}_n = \text{hom}_{\text{Grp}}(G_n, \Omega_n)$ tiene exactamente n elementos; llamemoslos χ_1, \dots, χ_n .
- [1] (b) Muestre que si $\chi, \rho \in \hat{G}_n$, entonces

$$\sum_{g \in G_n} \chi(g)\rho(g^{-1}) = \delta_{\chi, \rho}.$$

Sugerencia. Multiplique el miembro izquierdo de esta igualdad por $(1 - \chi(g_1)\rho(g_1^{-1}))$.

- [1] (c) Si $\chi \in \hat{G}_n$, sea $e_\chi = \frac{1}{n} \sum_{g \in G_n} \chi(g^{-1})g \in \mathbb{C}G_n$. Entonces si $\chi, \rho \in \hat{G}_n$,

$$\begin{aligned} e_\chi^2 &= e_\chi, \\ e_\chi e_\rho &= 1, \quad \text{cuando } \chi \neq \rho, \end{aligned}$$

y

$$\sum_{\chi \in \hat{G}_n} e_\chi = 1.$$

- [1] (d) Consideremos el anillo $A = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ con n factores y sean $x_1, \dots, x_n \in A$ los elementos de la base canónica. Hay un isomorfismo de anillos $\phi : \mathbb{C}G_n \rightarrow A$ tal que $\phi(e_{\chi_i}) = x_i$ si $1 \leq i \leq n$. Describa representantes para cada isoclase de $\mathbb{C}G_n$ -módulos simples.

2.4. Álgebras de grupos cíclicos sobre \mathbb{Q} .

- [1] (a) Sea p un número primo. Si $0 \leq k < l$, sea $\phi_{k,l} : \mathbb{Q}G_{p^l} \rightarrow \mathbb{Q}G_{p^k}$ el único morfismo de anillos tal que $\phi_{k,l}(g_{p^l}) = g_{p^k}$. Entonces $\ker \phi_{k,l} = \langle g_{p^l}^{p^k} - 1 \rangle$. Además, si $0 \leq r < k < l$, es $\phi_{r,l} = \phi_{r,k} \circ \phi_{k,l}$.
- [1] (b) Sea p un número primo y pongamos $\Phi_p = \sum_{i=0}^{p-1} X^i \in \mathbb{Z}[X]$. Entonces

$$X^{p^l} - 1 = (X - 1) \prod_{i=0}^{l-1} \Phi_p(X^{p^i})$$

- y cada uno de los factores $\Phi_p(X^{p^i})$ con $0 \leq i < l$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
- [3] (c) Sea p un número primo impar. Sea $l \geq 1$ y sea M un $\mathbb{Q}G_{p^l}$ -módulo simple. Si $\dim_{\mathbb{Q}} M < p^l - p^{l-1}$, entonces existe $k < l$ y un $\mathbb{Q}G_{p^k}$ -módulo simple N tal que $M \cong \phi_{k,l}^*(N)$.
- [3] (d) Sea p un número primo impar. Notemos M_0 al único $\mathbb{Q}G_1$ -módulo simple. Entonces, para todo $l \geq 1$ existe, a menos de isomorfismo, un único $\mathbb{Q}G_{p^l}$ -módulo simple M_l tal que $\dim_{\mathbb{Q}} M_l \geq p^l - p^{l-1}$. Además, se tiene que
- $\dim_{\mathbb{Q}} M_l = p^l - p^{l-1}$; y
 - $\mathbb{Q}G_{p^l} \cong \bigoplus_{i=0}^{l-1} \phi_{i,l}^*(M_i) \oplus M_l$.
- Sugerencia.* Haga inducción con respecto a l .
- [3] (e) Enuncie y pruebe enunciados análogos a los dos últimos para $p = 2$.
- [1] (f) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $l \geq 1$ y sea M_l un $\mathbb{Q}G_{p^l}$ -módulo simple de dimensión $p^l - p^{l-1}$. Entonces M_l posee una base con respecto a la cual la matriz de la aplicación $a : m \in M \mapsto g_{p^l} m \in M$ es la matriz compañera del polinomio $\Phi_p(X^{p^l})$.
- [2+] (g) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio mónico irreducible y sea $a \in M_n(\mathbb{Q})$ su matriz compañera. Entonces, si $C(a) \subset M_n(\mathbb{Q})$ es el centralizador de a en $M_n(\mathbb{Q})$, hay un isomorfismo $C(a) \cong \mathbb{Q}[X]/(f)$.
- [1+] (h) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Para cada $l \in \mathbb{N}$, sea $\zeta_l \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva p^l -ésima de la unidad y sea $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ el menor subcuerpo de \mathbb{C} que la contiene. Entonces hay un isomorfismo de álgebras

$$\mathbb{Q}G_{p^l} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_1) \times \cdots \times \mathbb{Q}(\zeta_l).$$

- (i) Supongamos que n es impar y que $n = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ es la factorización de n como producto de potencias de primos distintos. Entonces $G_n \cong G_{p_1}^{m_1} \times \cdots \times G_{p_r}^{m_r}$.
Si M es un $\mathbb{Q}G_n$ -módulo simple, entonces existen $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ tales que $l_i \leq m_i$ si $i \in \{1, \dots, r\}$ y

$$M \cong M_{p_1, m_1, l_1} \boxtimes \cdots \boxtimes M_{p_r, m_r, l_r}.$$

Aquí $M_{p, m, l}$ es el único $\mathbb{Q}G_{p^m}$ -módulo simple de dimensión $p^l - p^{l-1}$.

3. Álgebras de grupo

3.1. Muestre que si $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $kS_3 \cong k \times k \times M_2(k)$.

3.2. Encuentre la descomposición de Wedderburn para kD_4 con $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ si $D_4 = \langle s, t : s^2 = t^4 = 1, sts = t^{-1} \rangle$.

3.3. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo de los cuaterniones unitarios. Muestre que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}Q &\cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, \\ \mathbb{R}Q &\cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{C}\mathbb{Q} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}).$$

Aquí $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ es el anillo de los cuaterniones reales y $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ es el análogo definido sobre \mathbb{Q} .

4. Dominios de ideales principales

4.1. Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ no son dominios de factorización única. Encontrar ideales no principales en estos anillos.

4.2. (a) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es euclideo si $d \in \{-2, 2, 3\}$.

(b) Factorizar a $16 + 11\sqrt{2}$ como producto de elementos irreducibles del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(c) Un número primo $p \in \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sii -2 es un cuadrado en \mathbb{Z}_p . Dé ejemplos de factorizaciones en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ de números primos de \mathbb{Z} .

4.3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo, $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo correspondiente y sea $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ la localización de \mathbb{Z} en \mathfrak{p} . Describir todos sus ideales. Mostrar que $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es un dominio de ideales principales con un único ideal maximal y encontrar un conjunto completo de elementos primos no asociados dos a dos.

4.4. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A -módulo finitamente generado. Mostrar que

(a) M es de torsión sii $\text{hom}_A(M, A) = 0$; y

(b) M es indescomponible sii o bien $M \cong A$ o bien existe $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tal es que $M \cong A/(p^n)$.

¿Qué puede decir cuando M no es finitamente generado?

4.5. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encuentre todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5 .

4.6. Sea G un grupo abeliano finito y sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo tal que $p \mid |G|$. Entonces el número de elementos de orden p de G es coprimo con p .

4.7. (a) Para los siguientes grupos abelianos, dar la factorización del teorema de estructura:

i) $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_6 + \mathbb{Z}_9$;

ii) $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_8 + \mathbb{Z}_{14}$;

iii) $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{49} + \mathbb{Z}$;

iv) $\mathbb{Z}_{12} + \mathbb{Z}_{21} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_9 + \mathbb{Z}_7$.

(b) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(c) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

4.8. Sea $G \subset \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

- (a) $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito sii G tiene rango n .
- (b) Si G tiene rango n y $\{g_1, \dots, g_n\}$ es una base de G , sea $M \in M_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.



Abraham Adrian Albert
1905–1972, Estados Unidos.

Albert fue uno de los pioneros en el estudio de la estructura de las álgebras de división. Su libro *Structure of Algebras* es un clásico.