Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008
Ejercicios adicionales de Teoría de Grupos

1. Varia

1.1. Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X. Sea $k \geq 1$.

1.1.1. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \dots, x_k) = (gx_1, \dots, gx_k), \qquad \text{si } g \in g \text{ y } (x_1, \dots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. *Pongamos* $X^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \leq i < i \leq k\}$. *Diremos que la acción de G sobre X es k-*transitiva *si G actúa transitivamente sobre* $X^{(k)}$.

1.1.2. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es n-transitiva.

1.1.3. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es $(n-2)$-transitiva pero no $(n-1)$-transitiva.

1.1.4. Sea K un cuerpo, V un K-espacio vectorial. Mostrar que $\mathsf{Aut}_k(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.

1.1.5. Sea otra vez K un cuerpo, V un K-espacio vectorial con $\mathsf{dim}_K \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\mathsf{Aut}_K(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X, que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.

1.1.6. Mostrar que la acción sobre el conjunto de vértices de un tetraedro regular del grupo de rotaciones del sólido es 2- pero no 3-transitiva.

1.1.7. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\mathsf{Aut}(A)$ actúa sobre A'.

(a) Si $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A', entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p. Esto implica que A es un p-grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y entonces, usando el ejercicio 2.7 de la práctica 1, que $G \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

(b) Determinar todos los grupos A tales que $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A'.

Definición. *Diremos que la acción de G sobre X es* finamente k-transitiva *si es k-transitiva y además, para cada $\forall (x_1, \dots, x_k) \in X^{(k)}$ y cada $g_1, g_2 \in G$, es*

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \, g_1(x_i) = g_2(x_i) \implies g_1 = g_2.$$

En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de G que actúan de la misma forma sobre k elementos de k deben coincidir.

1.1.8. Si la acción de G es finamente k-transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.1.9. La acción de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente n-transitiva, finamente $(n-1)$-transitiva pero no finamente $(n-2)$-transitiva.

1.1.10. La acción de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente $(n-2)$-transitiva.

1.1.11. *Acciones finamente* 1-*transitivas.* Este ejercicio describe todas las acciones finamente 1-transitivas.

(a) Sea G un grupo finito. Pongamos $R = G$ y consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \to R$; recordemos que

$$g \cdot r = gr, \qquad \forall g \in G, r \in R.$$

Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

(b) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times R \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{id}_G \times \phi"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, si las flechas verticales están dadas por las acciones de G.

1.1.12. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

(a) Consideremos el conjunto $\mathsf{AGL}(1, K) = K^\times \times K$ y dotémoslo de un producto dado por

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab'), \qquad \forall (a, b), (a', b') \in \mathsf{AGL}(1, K).$$

Muestre que $(\mathsf{AGL}(1, K), \cdot)$ es un grupo.

(b) Consideremos ahora el conjunto $X = K$ y la aplicación $\mathsf{AGL}(1, K) \times K \to K$ dada por

$$(a, b) \cdot x = ax + b, \qquad \forall (a, b) \in \mathsf{AGL}(1, K), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\mathsf{AGL}(1, K)$ sobre X.

(c) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

1.1.13. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el que G actúa de forma finamente 2-transitiva.

(a) Sea $x_0 x \in X$ y $H = G_{x_0}$. Pongamos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Entonces H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G.

(b) $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $\mathsf{N}(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H \setminus \{1\}$.

(c) G posee involuciones y son todas conjugadas. Notemos I al conjunto de las involuciones de G.

(d) Sea $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X, gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Entonces es $|N'| = n - 1$. Además, N es un subconjunto normal de G.

(e) La acción de N sobre X es simplemente transitiva.

(f) H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución, $|I| = n$; en caso contrario, $|I| = n - 1$.

(g) Si $s, t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X.

(h) Sea $j \in G \setminus H$ una involución. Si $H \cap I \neq \varnothing$, sea además i la única involución de H. Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H \cap I = \varnothing; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \varnothing. \end{cases}$$

Aquí $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$.

(i) Es $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y N es un subgrupo normal abeliano de G. De hecho, si $H \cap I = \varnothing$, se tiene que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \varnothing$.

(j) Si T es un subgrupo normal de G con $\mathsf{Z}(T) \neq 1$, entonces $G = \mathsf{Z}(T) \rtimes H$.

(k) $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N.

(l) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \to H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ porque n no deja fijo ningún elemento de X, así que como la acción de H sobre X' es simplemente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.

(m) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones $\cdot$ y $+$ en X de la siguiente manera.

Sean $x, y \in X$. Si $x = x_0$, ponemos $x \cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y ponemos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.

Mostrar que $(X, +)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que $(X', \cdot)$ es un grupo isomorfo a H.

(n) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo K y que $G \cong \mathsf{AGL}(1, K)$.

1.1.14. Sea G un grupo.

(a) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.

(b) Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G.

(c) Mueste que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N \rangle) = \mathsf{C}(N)$.

(d) Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G. Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

(e) Si $N \subset G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, gNg^{-1}), entonces $\mathsf{Z}(N)$ es un subgrupo normal de G.

1.1.15. Si $g = (i_1\, i_2 \cdots i_{k-1}\, i_k) \in S_n$ es un ciclo de orden k, determinar $\mathsf{C}(g)$.

1.1.16. Sea G un grupo y S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:

(a) $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(T)$;

(b) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) \supset S$; y

(c) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) = \mathsf{C}(s)$.

1.1.17. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces:

(a) $g \in \mathsf{C}(g)$;

(b) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(g)) = \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$;

(c) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $h \in \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$; y

(d) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $\mathsf{Z}(\mathsf{C}(g)) \supset \mathsf{Z}(\mathsf{C}(h))$.

1.1.18. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

(a) Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

(b) Si los dos son normales, entonces $HK = KH$ y se trata de un subgrupo normal de G.

1.1.19. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Mostrar que $[N, G] \subset N$.

†**1.1.20.** El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

(a) Sea G el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Mostrar que G, con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

(b) Sea T el subconjunto de G formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+e \\ y+f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Mostrar que T es un subgrupo *normal* en G.

(c) Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+e \\ y+f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de T; como T es abeliano, L es normal en T.

(d) Mostrar que L no es normal en G.

1.1.21. Encontrar todos los subgrupos de D_4. Clasifíquelos bajo isomorfismo y determinar cuáles son normales.

1.1.22. Sea $\mathbb{H}$ el grupo de los cuaterniones. Mostrar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $H \ncong D_4$ y que todo subgrupo de H es normal.

Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden* 4*.*

1.1.23. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n. Mostrar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

1.1.24. *(a)* Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

(b) Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

(c) Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

†**1.1.25.** Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Entonces H es normal y tiene índice una potencia de 2.

†**1.1.26.** *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subgrupos propios maximales de G. Si $\mathcal{M} \neq \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$; si, en cambio, $\mathcal{M} = \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

(a) Determinar el subgrupo de Frattini de $\mathbb{Z}_{p^2}$ si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G.

(b) Mostrar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G.

(c) Mostrar que $\Phi(G)$ es normal.

1.1.27. Sea G un grupo y H un subgrupo propio de G. Entonces $\langle G \setminus H \rangle = G$.

1.1.28. Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

†**1.1.29.** *Grupos abelianos.* Sea G un grupo abeliano. Si p es un número primo, ponemos

$$G_p = \{g \in G : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } g^{p^r} = 1\}.$$

1.1.30. G_p es un subgrupo totalmente característico de G.

1.1.31. Si $p, p_1, \ldots, p_n$ son números primos distintos,

$$G_p \cap \left\langle G_{p_1} \cup \cdots \cup G_{p_n} \right\rangle = 1.$$

1.1.32. Supongamos que G es finito y que existe un número primo tal que $G = G_p$. Entonces G es producto directo de subgrupos cíclicos.

1.1.33. Probar que existen exactamente 3 grupos no isomorfos de orden 12. Caracterizar todos los grupos de orden 12.

1.1.34. Probar que si G tiene orden 5.7.37 entonces es cíclico. Qué pasa si tuviera orden 5.7.41?