Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008
Práctica 4: Anillos - ejemplos

1. *Anillo opuesto.*

(a) Sea A un anillo. Sea $* : A \times A \to A$ la operación definida por

$$a * b = ba, \qquad \forall a, b \in A.$$

Mostrar que $(A, +, *)$ es un anillo. Se trata del *anillo opuesto de A*, que escribimos habitualmente A^{op}.

(b) Muestre con un ejemplo que en general $A \ncong A^{\mathrm{op}}$.

2. *Anillos de matrices.*

(a) Sea A un anillo y sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de matrices $M_n(A)$ con coeficientes en A es un anillo con respecto a las operaciones usuales de suma y producto de matrices. Si $n > 1$, entonces $M_n(A)$ no es conmutativo.

(b) Sea otra vez A un anillo y sea $M_\infty(A) = \{f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A\}$. Decimos que un elemento $f \in M_\infty(A)$ tiene *filas finitas* si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(n, m) = 0$ si $m > k$; de manera similar, decimos que $f \in M_\infty(A)$ tiene *columnas finitas* si para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(n, m) = 0$ si $n > k$.

Sean $M_\infty^f(A)$ y $M_\infty^c(A)$ los subconjuntos de $M_\infty(A)$ de las matrices con filas finitas y con columnas finitas, respectivamente, y sea $M_\infty^{fc}(A) = M_\infty^f(A) \cap M_\infty^c(A)$. Mostrar que con el producto "usual" de matrices, $M_\infty^f(A)$, $M_\infty^c(A)$ y $M_\infty^{fc}(A)$ son anillos.

3. *Anillos de funciones.*

(a) Sea A un anillo y X un conjunto no vacío. Sea X^A el conjunto de todas las funciones $X \to A$. Definimos operaciones $+, \cdot : A \times A \to A$ poniendo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \forall x \in \mathrm{X}$$

y

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall x \in X$$

para cada $f, g \in A^X$. Mostrar que $(A, +, \cdot)$ es un anillo. ¿Cuándo es conmutativo?

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y sea $C^k(\mathbb{R}^n) \subset (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}}$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas y derivables k veces. Muestre que se trata de un subanillo.

4. *Anillos de polinomios.* Sea A un anillo y sea

$$S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A : \text{existe } \mathrm{X} \subset \mathbb{N}_0 \text{ finito tal que } f|_{\mathbb{N}_0 \setminus \mathrm{X}} \equiv 0\}.$$

Definimos operaciones $+, \cdot : S \times S \to S$ poniendo, para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

y

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

Muestre que estas operaciones están bien definidas y que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Sea X es una variable. Si $f \in S$ y $X \subset \mathbb{N}_0$ es finito y tal que $f|_{\mathbb{N}_0 \setminus X} \equiv 0$, podemos representar a f por la suma finita formal

$$f = \sum_{n \in X} f(n) X^n.$$

Es fácil ver que usando esta notación las operaciones de S se corresponden con las operaciones usuales de polinomios. Por eso, llamamos a S el *anillo de polinomios con coeficientes en* A y lo notamos $A[X]$.

5. *Anillos de series formales.*

(a) Sea A un anillo y sea $S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A\}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}_0$ a A. Definimos operaciones $+, \cdot : S \times S \to S$ poniendo, para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \quad \text{y} \quad (f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

Muestre que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Sea X una variable. Podemos representar escribimos a una función $f \in S$ por una serie formal

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}0} f(n) X^n.$$

Usando esta notación, las definiciones de la suma y el producto de S imitan formalmente a las correspondientes operaciones con las series. Esto hace que llamemos a S el *anillo de series formales de potencias con coeficientes en* A. La notación usual para este anillo es $A[\![X]\!]$.

(b) Tomamos ahora $A = \mathbb{R}$ y sea $\mathbb{R}\{\!\{X\}\!\} \subset \mathbb{R}[\![X]\!]$ el subconjunto de las series formales que tienen radio de convergencia positivo. Mostrar que se trata de un subanillo.

6. *Series de Dirichlet.* Sea A un anillo y sea $S = \{f : \mathbb{N} \to A\}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ a A. Definimos operaciones $+, \cdot : S \times S \to S$ poniendo, para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \quad \text{y} \quad (f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d \mid n}} f(d)g(n/d).$$

Muestre que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Si s es una variable, a un elemento $f \in S$ podemos asignarle la expresion formal

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Las operaciones de S se corresponden entonces con las operaciones evidentes de estas series.

7. *Anillo de grupo.*

(a) Sea G un grupo, sea A un anillo y sea $A[G]$ el conjunto de todas las funciones de $f : G \to A$ tales que

$$|\{g \in G : f(g) \neq 0\}| < \infty.$$

Definimos operaciones $+, \cdot : A[G] \times A[G] \to A[G]$ poniendo, para cada $s, t \in A[G]$ y cada $g \in G$,

$$(s+t)(g) = s(g) + t(g) \quad \text{y} \quad (s \cdot t)(g) = \sum_{h \in G} s(gh^{-1})t(h).$$

Muestre que $(A[G], +, \cdot)$ es un anillo.

(b) Supongamos desde ahora que $A = k$ es un cuerpo. Mostrar que $k[G]$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial k^G de todas las funciones $G \to k$.

(c) Si $g \in G$, sea $\hat{g} : G \to k$ la función tal que

$$\hat{g}(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } g = h; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Mostrar que $\{\hat{g} : g \in G\}$ es una base de $k[G]$. En particular, mostrar que todo elemento $f \in k[G]$ puede escribirse en la forma

$$f = \sum_{g \in G} \alpha_g \, \hat{g}$$

con coeficientes $\alpha_g \in k$ casi todos nulos.

(d) Mostrar que si $g, h \in G$, entonces $\hat{g} \cdot \hat{h} = \widehat{gh}$.

(e) Describa el centro de $k[G]$ cuando G es finito. ¿Qué pasa cuando G es infinito?

8. *Álgebra de cuaterniones.* Sea k un cuerpo y sea $\mathbb{H} = k^4$. Sean 1, i, j y k los vectores de la base canónica de $\mathbb{H}$. Mostrar que existe exactamente un producto asociativo k-bilineal $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tal que 1 es el elemento unidad y

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = 1, \\ &ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j. \end{aligned}$$

Si queremos poner en evidencia el cuerpo k, escribimos $\mathbb{H}(k)$.

(a) Muestre que con este producto $\mathbb{H}$ es una k-álgebra.

(b) Muestre que $\mathbb{H}(k)$ es conmutativa sii k tiene característica 2.

(c) Determine el centro de $\mathbb{H}$.

(d) Si $u = \alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$, sea $\bar{u} = \alpha 1 - \beta i - \gamma j - \delta k$. Muestre que esto define un anti-automorfismo de k-álgebras $\iota : u \in \mathbb{H} \mapsto \bar{u} \in \mathbb{H}$; esto es, muestre que ι es un isomorfismo de k-espacios vectoriales tal que

$$\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}.$$

(e) Muestre que existe una función $N : \mathbb{H} \to k$ tal que

$$u\,\bar{u} = N(u)1, \qquad \forall u \in \mathbb{H}.$$

Además, si $u, v \in \mathbb{H}$, entonces $N(uv) = N(u)N(v)$.

(f) Muestre que si $u \in \mathbb{H}$ es tal que $N(u) \neq 0$, entonces u es inversible en $\mathbb{H}$.

(g) Muestre que $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ es un álgebra de divisián pero que $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ no lo es.

9. *(a)* Sea A un anillo y $\mathcal{C}$ una familia de subanillos de A. Muestre que $B = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es un subanillo de A.

(b) Sea A un anillo, $B \subset A$ un subanillo y $X \subset A$. Mostrar que existe un subanillo $B[X]$ de A que contiene a X y a B y tal que todo otro subanillo de A con esta propiedad contiene a $B[X]$.

(c) Tomemos $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{Z}$. Describa explícitamente $B[\sqrt{2}]$, $B[\sqrt[3]{5}]$ y $B[\omega]$ si ω es una raíz primitiva p-ésima de la unidad y p un número primo. Describa $B[i]$ y $B[\eta]$ si η es una raíz primitiva sexta de la unidad.

10. *El álgebra de Weyl.* Sea $\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ el anillo de endomorfismos de $\mathbb{C}[X]$ considerado como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $p, q \in \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ definidos de la siguiente manera: si $f \in \mathbb{C}[X]$, entonces

$$p(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}, \qquad \text{y} \qquad q(f) = Xf$$

y sea $A = \mathbb{C}[p, q]$ el menor subanillo de $\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ que contiene a $\mathbb{C}$, a p y a q. Llamamos a A el *álgebra de Weyl*.

(a) A es una $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión infinita.

(b) En A es $pq - qp = 1$.

(c) El conjunto $\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de A como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(d) Describa el centro de A.

(e) Muestre que A no posee divisores de cero.

(f) Describa el conjunto de unidades de A.

11. Sea X un conjunto. Mostrar que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo. Aquí $\triangle$ es la operación de diferencia simétrica.

12. *Idempotentes.* Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$.

(a) Si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe, con las operaciones de A restringidas, es un anillo. Se trata de un subanillo exactamente cuando $e = 1$.

(b) Si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.

13. *Anillos booleanos.* Un anillo A es *booleano* si todos sus elementos son idempotentes.

(a) Si X es un conjunto, entonces el anillo $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es booleano.

(b) Un anillo booleano es conmutativo.