Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008

Práctica 5: Anillos - Morfismos, ideales y cocientes

1. Sea A un anillo.

(a) Muestre que hay exactamente un morfismo de anillos $\mathbb{Z} \to A$.

(b) Muestre que hay a lo sumo un morfismo de anillos $\mathbb{Q} \to A$ y que puede no haber ninguno. Describa cuándo se da cada uno de estos dos casos.

2. Sea A un anillo.

(a) Si $\mathcal{I}$ es una familia de ideales a izquierda (a derecha, biláteros) de A, muestre que $\bigcap I \in \mathcal{I} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más grande contenido en cada elemento de $\mathcal{I}$.

(b) Si $\mathcal{I}$ es una familia de ideales a izquierda (a derecha, biláteros) de A, entonces $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más chico que contiene a todos los elementos de $\mathcal{I}$.

3. Sea A un anillo e $I \subset A$ un ideal a izquierda. Muestre que existe un subanillo $\mathbb{I}(I) \subset A$ tal que

a) $I \subset \mathbb{I}(I)$ e I es un ideal bilátero de $\mathbb{I}(I)$;

b) $\mathbb{I}(I)$ es el menor subanillo de A con esa propiedad.

Llamamos a $\mathbb{I}(I)$ el *idealizador de I en A*.

4. *(a)* Sea A un anillo conmutativo e $I \subset A$ un ideal. Sea

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in I\}.$$

Muestre que $\sqrt{I}$ es un ideal de A.

(b) Sea A un anillo conmutativo e $I, J \subset A$ ideales. Sea

$$(I : J) = \{a \in A : aJ \subset I\}$$

Muestre que $(I : J)$ es un ideal de A.

5. Sea A un anillo conmutativo

(a) Sea $a \in A$ un elemento que no es inversible. Mostrar que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ tal que $a \in \mathfrak{m}$.

(b) Sea $I \subset A$ un ideal propio. Mostrar que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ tal que $I \subset \mathfrak{m}$.

6. Muestre que un anillo conmutativo simple es un cuerpo.

7. Sea A un anillo y $I \subset A$ un ideal bilátero. Sea $J = (I)$ el ideal generado por I en $A[X]$. Muestre que $A[X]/J \cong (A/I)[X]$.

8. Sea A un anillo y $I \subset A$ un ideal bilátero. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $M_n(I) \subset M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I. Mostrar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$ y que $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$.

9. Sea k un cuerpo.

(a) Encuentre todos los ideales a izquierda de $M_n(k)$.
(b) Muestre que $M_n(k)$ es simple.
(c) Sea ahora A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Si $J \subset M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subset A$ tal que $J = M_n(I)$.

Sugerencia. Sea $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$. Sea $J \subset M_n(A)$ un ideal bilátero y, para cada $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{n}$, sea $I_{i,j} \subset A$ el conjunto de todos los elementos de A que aparecen en la coordenada (i, j)-ésima de algún elemento de J. Muestre que $I_{i,j}$ es un ideal bilátero en A y que de hecho $I_{i,j} = I_{1,1}$ para todo $(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{n}$. Llamemos $I = I_{1,1}$. Muestre que $J = M_n(I)$.

10. Sea G un grupo y sea $H \subset G$ un subgrupo normal y sea k un cuerpo. Consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Muestre que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $k[\pi] : k[G] \to k[G/H]$. Describa el núcleo de $k[\pi]$.

11. Sea k un cuerpo y considere el carcaj Q de n vértices de la figura:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

Sea $T_n \subset M_n(k)$ el subanillo de las matrices triangulares superiores. Muestre que $kQ \cong T_n$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homomorfismo de anillos.
(a) Muestre que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ y que, de hecho, $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.
(b) La aplicación f es estrictamente creciente.
(c) Más aún, f es continua. Concluya que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

13. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe un homomorfismo de anillos $f : A \to B$:
(a) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;
(b) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;
(c) $A = k$, un cuerpo, y $B = M_n(k)$;
(d) $A = M_n(k)$ con k un cuerpo y $B = k$.

14. Sea $n \in \mathbb{N}$ compuesto. ¿Existe algún producto $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ que haga del grupo abeliano $\mathbb{Z}_n$ un cuerpo?

Definición. *Sea A un anillo conmutativo. Decimos que un ideal $\mathfrak{p} \subset A$ es primo si*

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in p \vee b \in p.$$

Escribimos $\operatorname{Spec} A$ *al conjunto de todos los ideales primos de A.*

1. *(a)* Un ideal $\mathfrak{p} \subset A$ es primo sii $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.
(b) Un ideal maximal de A es primo.

2. Determine $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. ¿Cuáles ideales primos de $\mathbb{Z}$ son maximales?

3. Sea k un cuerpo. Muestre que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[X]$, entonces existe $f \in \mathfrak{p}$ mónico e irreducible tal que $\mathfrak{p} = (f)$. Recíprocamente, todo ideal principal generado por un polinomio mónico e irreducible es primo en $k[X]$.

4. Sea A un anillo conmutativo.
(a) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ y $B \subset A$ es un subanillo, entonces $B \cap \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$.
(b) Si $I \subset A$ es un ideal, $f : A \to A/I$ es la proyección canónica y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A/I$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} A$.
(c) Sea $I \subset A$ un ideal y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ es tal que $\mathfrak{p} \supset I$. Entonces $\mathfrak{p}/I \in \operatorname{Spec} A/I$.

5. Muestre que si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ \mathbb{Z}[X]$ entonces existe un número primo $p \in \mathbb{N}$ tal que o bien $\mathfrak{p} = (p)$ o bien existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible sobre $\mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{p} = (p, f)$.

Sugerencia. Sea $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ \mathbb{Z}[X]$. Muestre que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal principal de $\mathbb{Z}$ generado por un número primo p, así que en particular $(p) \subset \mathfrak{p}$. Considere ahora el ideal $\mathfrak{p}/(p)$ de $\mathbb{Z}[X]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[X]$ y use un ejercicio anterior que describe los ideales primos de este anillo.

6. *Nilradical.* Sea A un anillo conmutativo. Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de A* es el conjunto $\mathsf{nil}(A) = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$.

(a) $\mathsf{nil}(A)$ es un ideal de A.

(b) $\mathsf{nil}(A/\,\mathsf{nil}(A)) = 0$.

[2] *(c)* $\mathsf{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A} \mathfrak{p}$.

(d) Muestre que si $x \in \mathsf{nil}(A)$, entonces $1 + x$ es inversible.

7. *Radical de Jacobson.* Sea A un anillo conmutativo. El *radical de Jacobson de A* es la intersección $J(A)$ de todos los ideales maximales de A.

Muestre que $x \in J(A)$ sii para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy \in A^{\times}$.