Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008

Práctica 3: Factorización y Localizacín

1. Factorización

1.1. Dar un ejemplo de $A < B < C$ dominios íntegros tales que A y C sean DFU pero B no.

1.2. Sea A un dominio íntegro, $I \subset A$ un ideal bilátero propio. Utilizando la proyección $\pi : A \to A/I$ se define:
$\hat{\pi} : A[X] \to A/I[X]$ tal que $\hat{\pi}(a) = \pi(a), \forall a \in A \subset A[X]$ y $\hat{\pi}(x) = x$.
Probar que si $f \in A[X]$ mónico es reducible, entonces $\hat{\pi}(f)$ es reducible.

Definición. *Sea A un dominio íntegro y sean $0 \neq a, b \in A$. Un $d \in A$ Se llama un máximo común divisor entre a y b si cumple las siguientes condiciones:*
(i) $d|a$ y $d|b$
(ii) Si $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$

Si un máximo común divisor entre a y b es una unidad, a y b se dicen coprimos.

1.3. Si d y d' son dos máximos comunes divisores entre a y b, entonces d y d' son asociados.

1.4. Sea A un DFU. Entonces, si $0 \neq a, b \in A$, existe un máximo común divisor entre a y b.

1.5. Probar que en $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ no existe un máximo común divisor entre 6 y $2.(1+\sqrt{-5})$.

1.6. ¿Es cierto que en un DFU, si d es un máximo com'un divisor entre a y b, entonces los ideales $< a, b >$ y $< d >$ coinciden?

1.7. Sean a, b y c elementos de un DFU. Probar:

(a) Si $a|b.c$ y a y b son coprimos, entonces $a|c$.
(b) Si a y b son coprimos, $a|c$ y $b|c$, entonces $a.b|c$.

1.8. Sea A DFU y K su cuerpo de fraciones. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k \in A[X]$. Sea $p \in A$ un primo tal que:

- p no divide a a_n
- p divide a $a_i, \forall 0 \leq i \leq n-1$
- p^2 no divide a a_0

Probar que f es irreducible en $K[X]$.

1.9. Sea A DFU y K su cuerpo de fraciones. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k \in A[X]$ tal que $a_0 \neq 0$. Sean $0 \neq a, b \in A$ coprimos tales que $\frac{a}{b} \in K$ es raíz de f, probar que $a|a_0$ y $b|a_n$ en A.

1.10. Probar que todo ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ es:

- $< p >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo.
- $< p, f >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\hat{\pi}(f)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p$.
- $< f >$ con f primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

2. Localización

En estos ejercicios los anillos son conmutativos.

2.11. Sea A un anillo y sea $S \subset A^\times$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de unidades de A. Entonces $A_S \cong A$.

2.12. Sea A un anillo y sea $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

2.13. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subset A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Entonces $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

2.14. Sea A un anillo, $S, T \subset A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y sea T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \to A_S$. Sea $U = ST = \{st : s \in S, t \in T\}$.

Muestre que U es un conjunto multiplicativamente cerrado en A y que $(A_S)_T \cong A_U$.

2.15. *(a)* Sea X un espacio métrico y sea $A = C_{\mathbb{R}}(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre X. Sea $x_0 \in X$ y pongamos $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$. Muestre que S es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \to A_S$? De no serlo, describa su núcleo.

(b) Supongamos que A es un dominio de interidad y $S \subset A$ es multiplicativamente cerrado. Muestre que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(c) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerado. Dar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicaci'on can'onica $A \to A_S$ sea inyectiva.

2.16. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Muestre que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En geeral, escribimos $A_\mathfrak{p}$ en lugar de $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$.

2.17. Sea $A = \mathsf{C}(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : \forall t \in U,\ f(t) \neq 0\}$.

(a) S es multiplicativamente cerrado en A.

(b) Sea $r : \mathsf{C}(\mathbb{R}) \to \mathsf{C}(U)$ la restricción de funciones. Muestre que existe $\bar{r} : \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \to \mathsf{C}(U)$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathsf{C}(U) \\ \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, verifique que $\bar{r}$ es inyectiva.

[2] *(c)* Muestre que $\bar{r}$ es sobreyectiva.

2.18. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea $f : A \to A_S$ la aplicación canónica.

(a) Muestre que si $I \subset A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A.

(b) De esta forma, se obtiene una aplicación $f^* : \mathsf{Id}(A_S) \to \mathsf{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A. Muestre que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.

(c) Si $J \subset A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J.

(d) Muestre que $f^*(\operatorname{Spec} A_S) \subset \operatorname{Spec} A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.

2.19. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(a) Si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los que no intersecan a S, entonces I es primo.

(b) Describa el niradical de A_S.

2.20. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de $\mathbb{Z}$ correspondiente. Muestre que si $I \subset \mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r \mathbb{Z}_p$.

2.21. Sea A un anillo y $T \subset A$ un subconjunto. Sea $X = \{x_t : t \in T\}$ un conjunto de variables indexadas por T y sea $A[X]$ en anillo de polinomios con variables en X. Sea $S \subset A$ el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de A que contiene a T. Muestre que ay un isomorfismo

$$A_S \cong A[X] / \langle tx_t - 1 : t \in T \rangle .$$

†**2.22.** Sea A un anillo. Muestre que $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado maximal sii $A \setminus S$ es un ideal primo minimal.

†**2.23.** Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Decimo que S es *saturado* si

$$ab \in S \iff a \in S \quad \text{y} \quad b \in S.$$

Muestre que S es saturado sii $A \setminus S$ es uni'on de ideales primos.

2.24. Sea A un anillo. Describa el subconjunto $S \subset A$ multiplicativamente cerrado maximal tal que $A \to A_S$ es inyectivo.