Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008

Práctica 7: Módulos

1. Módulos y morfismos

1.1. Sea A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in M_{m,n}(A)$. Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos
$f : A^n \to A^m$
$x \mapsto Mx$

1.2. Sea A un anillo.

(a) Sea M un A-módulo a izquierda. Si definimos un producto $M \times A^{\mathrm{op}} \to M$ poniendo $m \cdot a = am$, podemos dotar a M de una estructura de A^{op}-módulo a derecha. Lo notamos M^{op}.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos a izquierda, entonces $f : M^{\mathrm{op}} \to N^{\mathrm{op}}$ es un morfismo de A^{op}-módulos a derecha.

(c) Recíprocamente, todo A^{op}-módulo a derecha es de la forma M^{op} para algún A-módulo a izquierda M y todo morfismo de A^{op}-módulos está inducido como en la parte anterior.

1.3. Sea A un anillo, M un A-módulo a izq. y sea X un conjunto no vacío. Probar que se tienen los A-módulos a izq:
$M^X = \{f : X \to M\}$
$M^{(X)} = \{f : X \to M \mid f(x) = 0, \text{salvo para finitos } x \in X\}$

1.4. Sea G un grupo abeliano y $A = \mathsf{End}(G)$ su anillo de endomorfismos. Probar que G es un A-módulo a izquierda con la operación $f \cdot x = f(x)$.

1.5. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-módulos. Muestre que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos si y sólo si es un morfismo de grupos abelianos.

1.6. Sean M, N, P tres A-módulos y funciones $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$. Probar que

(a) Si gf y g son morfismos de A-módulos y g es mono, entonces f es morfismo.

(b) Si gf y f son morfismos de A-módulos y f es epi, entonces g es morfismo.

1.7. Sea A un anillo y N, M dos A-módulos.

(a) Muestre que $\mathsf{hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \qquad \forall f, g \in \mathsf{hom}_A(M, N), \ \forall m \in M.$$

(b) Sea $\mathsf{Z}(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$\mathsf{Z}(A) \times \mathsf{hom}_A(M, N) \to \mathsf{hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad \forall f \in \mathsf{hom}_A(M, N), \ \forall a \in \mathsf{Z}(A), \ \forall m \in M.$$

Muestre que esto hace de $\mathsf{hom}_A(M, N)$ un $\mathsf{Z}(A)$-módulo.

(c) Muestre que para todo A-módulo M existe un isomorfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos $\hom_A(A, M) \to M$.

1.8. *(a)* Sean A, B y C anillos y sean M un (A, B)-bimódulo y N un (A, C)-bimódulo. Muestre que el grupo abeliano $\hom_A(M, N)$ posee una única estructura de (B, C)-bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c, \qquad \forall b \in B, \forall c \in C, \forall m \in M.$$

(b) Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Considerando a A como (A, A)-bimódulo, muestre que hay un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\hom_A(A, M) \cong M$.

1.9. Sea M un A-módulo a izquierda. Para un subconjunto $S \subset M$ definimos el anulador de S al conjunto:

$$\mathsf{ann}(S) = \{a \in A : a \cdot s = 0, \forall s \in S\}$$

Probar que:

(a) $S \subset T$, entonces $\mathsf{ann}(T) \subset \mathsf{ann}(S)$.

(b) $\mathsf{ann}(S)$ es un ideal a izquierda de A y si S es un submódulo, entonces resulta un ideal bilátero.

(c) $\mathsf{ann}(S) = \bigcap\limits_{s \in S} \mathsf{ann}(s)$.

(d) $X \neq \varnothing$ un conjunto, entonces $\mathsf{ann}(M^J) = \mathsf{ann}(M^{(J)}) = \mathsf{ann}(M)$.

(e) Si $I \subset \mathsf{ann}(M)$ es un ideal bilátero, entonces M es un A/I-módulo.

(f) En el punto anterior, si $I = \mathsf{ann}(M)$ resulta M sin torsión.

1.10. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Si $\mathsf{ann}\, M = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*. Dar ejemplos de módulos fieles.

1.11. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos.

(a) Muestre que si definimos un porducto $A \times B \to B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A-módulo a izquierda sobre B. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(b) Sea M un B-módulo a izquierda. Muestre que el producto $A \times M \to M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \to \phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquieda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(d) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \hom_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \hom_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(e) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \mathsf{End}_B(M) \to \mathsf{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

(f) Observar también que $\phi^*(1_M) = 1_{\phi^* M}$. Luego, se te tiene un funtor:

$$\phi^* : \quad \mathsf{mod}\ (B) \to \quad \mathsf{mod}\ (A)$$

(g) De condiciones sobre ϕ que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \mathsf{hom}_B(M, N) \to \mathsf{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva (sobreyectiva) cualesquiera sean los B-módulos M y N.

1.12. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda.

(a) Muestre que M es un B-módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un (A, B)-bimódulo.

(b) ¿Qué relación hay entre A y $\mathsf{End}_B(M)$?

1.13. Sea A un anillo.

(a) Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda definimos un aplicaciones

$$f_P^* : h \in \mathsf{hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \mathsf{hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \mathsf{hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \mathsf{hom}_A(P, M').$$

Se trata de morfismos de grupos abelianos.

(b) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismos de A-módulos. Entonces para cada A-módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(c) Una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay un enunciado similar que involcre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(d) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

1.14. Un A-módulo M es simple sii para todo $m \in M \setminus 0$, $Am = M$.

1.15. *(a)* *Lema de Schur.* Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

i) Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.

ii) Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.

iii) Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si M es un A-módulo simple, $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.

1.16. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

(a) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si $\det M \neq 0$.

(b) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si $\det M \in A^\times$.

1.17. *(a)* Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

1.18. Dar ejemplos de conjuntos linealmente independientes que no se pueden completar a una base. También, dar ejemplos de conjuntos de generadores de los cuales no se puede extraer una base.

1.19. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

1.20. Sea k un cuerpo y V un k-espacio vectorial. Sea $f \in \mathrm{End}_k(V)$. Muestre que existe exactamente una estructura de $k[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subset k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \qquad \forall v \in V.$$

2. Condiciones de cadena

2.21. Un A-módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

2.22. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generados.

2.23. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y sea $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Muestre que $\ker f$ es finitamente generado.

2.24. Muestre que existen módulos finitamente generados y no Nötherianos y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son Nötherianos.

2.25. Un k-espacio vectorial V es nötheriano si y solo si $\dim_k V < \infty$.

2.26. Un anillo principal a izquierda es Nötheriano a izquierda.

2.27. Un anillo A es nötheriano a izquierda (derecha) sii $M_n(A)$ es nötheriano a izquierda (derecha).

2.28. Probar que un anillo conmutativo noetheriano es prefactorial. Dar un ejemplo de un DFU no noetheriano.

2.29. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Si $n \in \mathbb{N}_0$, pongamos $K_n = \ker f^n$ y $I_n = \mathrm{im}\, f^n$. Entonces

(a) $K_1 = K_2 \implies K_1 \cap I_1 = 0$;

(b) $I_1 = I_2 \implies K_1 + I_1 = M$;

(c) si M es Nötheriano, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(d) si M es Nötheriano y f es sobreyectivo, entonces f es un automorfismo.

2.30. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es nötheriano.

2.31. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \mathsf{End}_k(V)$ el anillo de endomorfisos de V. Muestre que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

Definición. *Sea A-módulo M se dice artiniano si toda cadena descendente de submódulos se estaciona. Un anillo A se dice artiniano si lo es como A-módulo un anillo.*

2.32. Un dominio integro artiniano es un cuerpo.

2.33. *(a)* Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(b) Un grupo abeliano es artiniano y nötheriano si y solo si es finito.

2.34. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Si B es nötheriano a izquierda, entonces A es nötheriano a izquierda.

2.35. Sea A el matrices 2×2 de la forma $\begin{matrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{matrix}$ con el producto usual de matrices. Probar que es Noetheriano a derecha pero no a izquierda.

2.36. *Algebras de matrices.* Sean A y B anillos y M y N un A-B-bimódulo y un B-A-bimódulo, respectivamente. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

el álgebra de matrices. Entonces T es nötheriana a derecha sii A y B son anillos nötherianos a derecha y M es un B-módulo nötheriano y N es un A-módulo nötheriano.

2.37. Sea G un grupo finito, k un cuerpo. Probar que el álgebra de grupo $k[G]$ es un anillo artiniano y noetheriano.

3. Suma y Producto. Sucesiones Exactas.

3.38. Dar dos sumandos directos S, T de $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulos tales que $S + T$ no sea sumando directo.

3.39. Sean M un A-módulo y $S \subset T$ sumódulos de M.

(a) Si S es sumando directo de M, entonces S es sumando directo de T.

(b) Si S es sumando directo de T y T de M, entonces S es sumando directo de M.

3.40. Sea $M \xrightarrow{f} N$ un epimorfismo de A-módulos. Si $S \subset N$ es un submódulo tal que $f^{-1} \subset M$ es sumando directo, entonces S lo es.

3.41. Sean G, H grupos abelianos finitos. Probar que todo subgrupo de $G \oplus H$ es de la forma $S \oplus T$ con $S \subset G, T \subset H$ subgrupos si y sólo si los órdenes de G y H son coprimos.

3.42. Sea un grupo abeliano $G = S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de grupos de $\mathbb{Q}$ en G, entonces existe un monomorfismo en S o en T.

3.43. Sean M, N A-módulos a izquierda y $f : M \to N$ una función. Probar que f es morfismo si y sólo si, el gráfico de f es un submódulo de $M \oplus N$.

3.44. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Se tiene entonces el A-módulo dual: $M^* = \mathsf{hom}_A(M, A)$.

(a) Para $M \xrightarrow{f} N$ morfismo de A-módulos, se tiene un morfismo $N^* \xrightarrow{f^*} M^*$ dado por $f^*(\phi) = \phi \circ f$.
(b) Probar que se tiene un funtor contravariante de A-módulos en A-módulos.
(c) Probar que la aplicación $\eta : M \to M^{**}$ definida por:

$$\eta(m)(\phi) = \phi(m) \qquad (m \in M, \phi \in M^*$$

es un morfismo de A-módulos y que $\ker(\eta) = \bigcap_{\phi \in M^*} \ker(\phi)$.
(d) Dar un ejemplo de $M \neq 0$ y $M^{**} = 0$.
(e) Dar un ejemplo de $M^{**} \neq 0$ y η no monomorfismo.
(f) Probar que para todo morfismo de A-módulos $M \xrightarrow{f} N$ el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_M"'] & N \arrow[d, "\eta_N"] \\ M^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & N^{**} \end{tikzcd}$$

3.45. Sea la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

Son equivalentes:

(a) Existe $M \xrightarrow{t} M'$ tal que $tf = 1_{M'}$, es decir f es una sección.
(b) Existe $M'' \xrightarrow{u} M$ tal que $gu = 1_{M''}$, es decir g es una retracción.
(c) $M \simeq M' \oplus M''$

Definición. *En las condiciones del ejercicio anterior, se dice que la sucesión exacta se parte.*

3.46. Probar que en el ejercicio anterior M'' es libre, entonces la sucesión exacta se parte.

3.47. *(a)* Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos en el que las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.
(b) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

3.48. *Lema de los cinco.* Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(a) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

3.49. *Lema de los nueve.* Consideremos un diagrama de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que las tres columnas y las dos primeras (o las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera fila también es exacta.