Álgebra II

Segundo Cuatrimestre — 2008

Práctica 8: Módulos II

1. Localización de módulos

1.1. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) El morfismo de anillos $A \to A_S$ permite considerar todo A_S módulo M como A módulo vía $a \cdot m = \frac{a}{1} \cdot m$. Observar que las aplicaciones:

$$\mu_s : M \to M$$
$$m \mapsto s \cdot m$$

son isomorfismos, para todo $s \in S$.

(b) Sea M un A-módulo tal que para todo $s \in S$, las aplicaciones:

$$\mu_s : M \to M$$
$$m \mapsto s \cdot m$$

resultan isomorfismos. Probar que tiene una estructura natural de A_S-módulo, dada por $\frac{a}{s} \cdot m = a \cdot \mu_s^{-1}(m)$. Observar que si volvemos a ver M como A módulo según el punto anterior, tenemos la misma estructura de A-módulo.

1.2. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Mostrar que existe un A_S-módulo M_S y un morfismo de A-módulos $j_M : M \to M_S$ tales que:
Para cada A_S módulo N y cada morfismo de A-módulos $f : M \to N$ con codominio en un A-módulo N, existe un único morfismo $\bar{f} : M_S \to N$ tal que $f = \bar{f} \circ j_M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \\ M_S \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Reescribir la propiedad universal, utilizando sólo A-módulos (valerse del ejercicio anterior).

(c) El par (M_S, j_M) está determinados a menos de un isomorfismo canónico.

(d) Si M es un A-módulo tal que para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \to M_S$ es un isomorfismo.

(e) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-modulos, entonces existe un único morfismo $f_S : M_S \to N_S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S \end{tikzcd}$$

(f) Probar que la localización en S define un funtor de la categoría de A-módulos en la de A_S-módulos.

Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ para un ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$, entonces escribimos $M_\mathfrak{p}$ en vez de M_S.

1.3. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Entonces $M_S = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

De un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

1.4. *Exactitud de la localización.*

(a) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado. Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

(b) En particular, si $M' \subset M$ es un submódulo de un A-módulo M, entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S.

1.5. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y M un A-módulo.

(a) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P + Q)_S = P_S + Q_S$.

(b) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$.

(c) Si $P \subset M$ es un submódulos, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

1.6. *Propiedades locales.* Sea A un anillo conmutativo.

(a) Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- (i) $M = 0$;
- (ii) $M_\mathfrak{p} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$; y
- (iii) $M_\mathfrak{m} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(b) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- (i) f es inyectivo;
- (ii) $f_\mathfrak{p}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$; y
- (iii) $f_\mathfrak{m}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(c) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- (i) f es sobreyectivo;
- (ii) $f_\mathfrak{p}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\ A$; y
- (iii) $f_\mathfrak{m}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(d) Consideremos una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$0 < r[r] \qquad M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión (1) es exacta.

(ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$, es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$, es exacta.

2. Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

2.2. Muestre que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es proyectivo.

Sugerencia. Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}| < \infty$. Entonces si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre, M es libre de rango no numerable. Analice ahora el grupo abeliano $M/2M$.

2.3. *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es un par $((x_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \hom_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

(i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y

(ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Nótese que en la segunda condición la suma tiene sentido por la primera condición.

(a) Muestre que un A-módulo P es proyectivo sii posee una base dual.

(b) Muestre que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado sii posee una base dual finita.

2.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S-módulo.

(b) Si M es proyectivo, entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.

(c) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

2.5. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \hom_A(M, A)$ con su estructura de A-módulo a derecha obtenida de la estructura de A-bimódulo de A. Muestre que M es un proyectivo finitamente generado sii M^* lo es.

2.6. $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

2.7. Si A es un dominio de integridad y K es su cuerpo de fracciones, entonces K es un A-módulo inyectivo.

2.8. Sea G un grupo finito y k un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en k. Mustrar que todo $k[G]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Todo $k[G]$-módulo es necesariamente libre?

2.9. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineal. Considerando $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ como $\mathbb{R}[x]$-módulo probar que:

(a) Si la matriz de φ en la base canónica es simétrica u ortogonal, entonces todo $\mathbb{R}[x]$ submódulo es un sumando directo.

(b) Dar ejemplos de φ que admitan $\mathbb{R}[x]$ submódulos que no sean sumandos directos.

2.10. Si A un un anillo de división, todo A-modulo es inyectivo y proyectivo.

2.11. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

(a) de G_{p^∞} en $G_{p^\infty} \oplus G_p$

(b) de $\mathbb{Q}$ en $G_{p^\infty} \oplus G_{p^\infty}$

(c) de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $G_{p^\infty} \oplus G_n$

2.12. Para un A-módulo M

(a) Probar que se tiene $e_M : M \hookrightarrow M^{**}$ dada por:
$e_M(m) : M^* \to A$
$\phi = \phi(m)$

(b) Si consideramos $e_{M^*} : M^* \hookrightarrow M^{***}$, se tiene que la imágen de M^* es un sumando directo de M^{***}.

2.13. Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo y A un anillo. Entonces $\mathsf{hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ es un A-módulo inyectivo.

3. Productos tensoriales

3.1. Probar que $A \otimes_A M \cong M$.

3.2. Probar que $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

3.3. Probar que $(M \oplus N) \otimes P = (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

3.4. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

3.5. Muestre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

3.6. Probar que si D es un A-módulo divisible y T de torsión, entonces $D \otimes_A T = 0$.

3.7. Sea $\psi_{M,N} : M^* \otimes_A N \to \mathsf{hom}_A(M, N)$ el morfismo natural.

(a) M proyectivo de tipo finito entonces $\psi_{M,N}$ es un iso para todo N.

(b) $\psi_{M,M}$ es un iso si y sólo si M es proyectivo de tipo finito.

3.8. Sean A y B anillos y M_A, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

3.9. Sea A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal y M un A-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

3.10. Sea A un anillo, M_A y ${}_AN$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$.
Si $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

3.11. Sea A un anillo y M un A-módulo playo. Si $N \subset M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

3.12. Si A es un anillo conmutativo y M, N son A-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

†**3.13.** Sea A un anillo y M un A-módulo izquierdo. Entonces M es playo sii para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ finitamente generado, la aplicación

$$a \otimes m \in \mathfrak{a} \otimes_A M \mapsto am \in \mathfrak{a}M$$

es un isomorfismo.

3.14. Sea A un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo A-módulo a izquierda es playo.
(ii) Todo A-módulo a derecha es playo.
(iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.
(iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
(v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

3.15. *Criterio local de platitud.* Sea A un anillo conmutativo y M un A-modulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) M es playo;
(ii) para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo playo;
(iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_\mathfrak{m}$ es un $A_\mathfrak{m}$-módulo playo.

3.16. *Producto tensorial de álgebras.* Sea k un cuerpo y sean A y B k-álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

3.17. Sea k un cuerpo, A una k-álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras:

$$A[X] \cong k[X] \otimes_k A,$$

$$M_n(A) \cong M_n(k) \otimes_k A,$$

$$M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_k M_m(A).$$