Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2008
Práctica 9: Teoremas clásicos de estructura

1. Dominios de ideales principales

1.1. Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ no son dominios de factorización única. Encontrar ideales no principales en estos anillos.

1.2. *(a)* Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es euclideano si $d \in \{-2, 2, 3\}$.

(b) Factorizar a $16 + 11\sqrt{2}$ como producto de elementos irreducibles del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(c) Un número primo $p \in \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sii -2 es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$. Dé ejemplos de factorizaciones en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ de números primos de $\mathbb{Z}$.

1.3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo, $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo correspondiente y sea $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ la localización de $\mathbb{Z}$ en $\mathfrak{p}$. Describir todos sus ideales. Mostrar que $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ es un dominio de ideales principales con un único ideal maximal y encontrar un conjunto completo de elementos primos no asociados dos a dos.

2. Torsión

2.1. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Si M es libre, entonces es sin torsion.

b) Si A es íntegro y M es libre, entonces M es sin torsion.

c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $\mathrm{im}(f)$ es de torsión.

d) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $\mathrm{im}(f)$ es sin torsión.

e) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.

f) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

2.2. Sea A un anillo, T un A-módulo de torsión y D un A-módulo divisible. Calcular $\mathrm{Hom}_A(T, D)$.

2.3. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

2.4. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/(a))[p] \cong A/(pn)$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 / p^k | a\}$.

b) M es simple si y solo si existe $p \in A$ irreducible tal que $M \cong A/(p)$.

c) M es un A-módulo sin torsión si y solo si $\mathrm{Hom}_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

2.5. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

a) Si M es de tipo finito y S es un submodulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submodulo $S = 0$ de M, entonces $M \cong A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \cong \mathbb{Z}$.

2.6. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que

(a) M es de torsión sii $\mathsf{hom}_A(M, A) = 0$; y

(b) M es indescomponible si y solo si, o bien $M \cong A$ o bien existe $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tal es que $M \cong A/(p^n)$.

¿Qué puede decir cuando M no es finitamente generado?

2.7. Sea A un anillo conmutativo, y I un ideal de A. Para cada A-módulo M, denotemos por $\Gamma_I(M) := \{m \in M \ : \ m.I^l = 0, \text{para todo } l \gg 0\}$ la I-torsión de M. Pruebe que:

a) $\Gamma_I(-)$ define un endo-funtor covariante de A-módulos;

b) $\Gamma_I(-)$ es exacto a irquierda;

c) ¿Es $\Gamma_I(-)$ exacto?

d) $\Gamma_I(A/J) \cong J^{\mathrm{sat}_I}/J$, donde $J^{\mathrm{sat}_I} := \bigcup_{l \geq 0}\{a \in A \ : \ a.I^l \in J\}$ indica la saturación de J respecto de I.

3. Teoremas de estructuras

3.8. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encuentre todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5.

3.9. Sea G un grupo abeliano finito y sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo tal que $p \mid |G|$. Entonces el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

3.10. *(a)* Para los siguientes grupos abelianos, dar la factorización del teorema de estructura:

i) $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_6 + \mathbb{Z}_9$;

ii) $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_8 + \mathbb{Z}_{14}$;

iii) $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{49} + \mathbb{Z}$;

iv) $\mathbb{Z}_{12} + \mathbb{Z}_{21} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_9 + \mathbb{Z}_7$.

(b) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(c) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

3.11. Sea $G \subset \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(a) $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito sii G tiene rango n.

(b) Si G tiene rango n y $\{g_1, \ldots, d_n\}$ es una base de G, sea $M \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\mathsf{det}\, M|$.