Álgebra II - Práctica 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar en cada uno de los siguientes casos si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, decidir si es abeliano:

   a) $G = \mathbb{N}$ y $G = \mathbb{Z}$, $a * b = a + b$.

   b) $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Q}^*$ y $G = \mathbb{Q}_{>0}$, $a * b = ab$.

   c) $G = \mathbb{N}$, $a * b = [a, b]$.

   d) $G = \mathbb{Z}_n$, $a * b = r_n(a + b)$.

   e) $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C}^*$, $G = S^1$ y $G = G_n$, $a * b = ab$.

   f) $G = M_n(\mathbb{R})$, $G = GL_n(\mathbb{R})$ y $G = SL_n(\mathbb{R})$, $a * b = ab$.

   g) $G = End_K(V)$ (V un K-espacio vectorial), $f * g = f \circ g$.

   h) $G = S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ biyectiva}\}$ $(X \neq \emptyset)$, $f * g = f \circ g$.

   i) $G = S(\mathbb{Z})$, $f * g = f \circ g^{-1}$.

   j) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $(a, b) * (c, d) = (r_2(a + c), r_2(b + d))$.

   k) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$, $a * b = r_n(ab)$.

2. Sean G un grupo y $a, b \in G$. Probar que las siguientes funciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas:

   a) $x \mapsto a * x$.

   b) $x \mapsto x * a$.

   c) $x \mapsto a * x * b$.

   d) $x \mapsto a * x * a^{-1}$.

   e) $x \mapsto x^{-1}$.

3. Encontrar todas las posibles tablas de multiplicación en grupos de orden menor o igual a 4. Concluir que todos estos grupos son abelianos.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, probar que H es un subgrupo propio:

   a) $G = \mathbb{Q}^*$ y $H = \mathbb{Q}_{>0}$, $a * b = ab$.

   b) $G = \mathbb{C}^*$ y $H = S^1$, $a * b = ab$.

   c) $G = S^1$ y $H = G_n$, $a * b = ab$.

   d) $G = GL_n(\mathbb{R})$ y $H = SL_n(\mathbb{R})$, $a * b = ab$.

   e) $G = D_4$ y $H = \langle \rho \rangle$, $a * b = a \circ b$.

f) $G = \mathbb{Z}_{2n}$ y $H = \langle 2 \rangle$, $\qquad a * b = r_{2n}(a+b)$.

g) $G = GL_2(\mathbb{C})$ y $H = \mathcal{H}$, $\qquad a * b = ab$,

donde $\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

5. En cada ítem del Ejercicio 4, decidir si existe un subgrupo H' tal que $H \subsetneq H' \subsetneq G$.

6. Encontrar todos los subgrupos de S_3 y D_4.

7. Sean G un grupo y H y K dos subgrupos. Probar que $H \cap K$ es un subgrupo y que $H \cup K$ es un subgrupo si y sólo si $H \subset K$ o $K \subset H$.

8. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ y $C_G = \{x \in G \mid xy = yx \ \forall y \in G\}$ son subgrupos.

9. Sea $\sigma = (1\ 2\ 3)$. Hallar todos los elementos de $C_{S_3}(\sigma)$.

10. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = G_n$.

11. Sea p un número primo. Probar que si H es un subgrupo propio de G_{p^∞} entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_{p^n}$.

12. Probar que $\mathbb{Z}_n$ es un grupo cíclico y hallar todos los $x \in \mathbb{Z}_n$ tales que $\mathbb{Z}_n = \langle x \rangle$.

13. Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y decidir cuáles son cíclicos.

14. Decidir si S^1 es un grupo cíclico.

15. Probar que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

16. Probar que $\{2, 3\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$.

17. Probar que el conjunto de todas las trasposiciones entre dos elementos de $\{1, \dots, n\}$ es un sistema de generadores de S_n.

18. Hallar $ord(x)$ en los siguientes casos:

    a) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $\qquad x = 2, \ \ x = 3$ y $x = 4$.

    b) $G = S^1$, $\qquad x = e^{\frac{2\Pi i}{n}}$.

    c) $G = D_4$, $\qquad x = \rho^2 s$.

    d) $G = \mathcal{H}$, $\qquad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

19. Hallar el orden de todos los elementos de S_5.

20. Sea p un número primo impar y sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$. Hallar el orden de todos los elementos de G.

21. Sean G un grupo y $x, y \in G$. Probar que $ord(x) = ord(yxy^{-1})$.

22. Sean G_1 y G_2 grupos y $g_1 \in G_1$ y $g_2 \in G_2$ elementos de orden finito. Probar que el orden de (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es igual a $[ord(g_1), ord(g_2)]$.

23. Sean G un grupo, $a \in G$ un elemento de orden n y $d \in \mathbb{N}$. Calcular $ord(a^d)$.

24. Sea $d \mid n$. Hallar la cantidad de elementos de orden d en $\mathbb{Z}_n$ y la cantidad de subgrupos de orden d en $\mathbb{Z}_n$.

25. Sean G un grupo finito y H y K dos subgrupos. Probar que si $(|H|, |K|) = 1$ entonces $H \cap K = \{1\}$.

26. Sean G un grupo, p un número primo y H y K dos subgrupos distintos, ambos de orden p. Probar que $H \cap K = \{1\}$.

27. Sea G un grupo tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden 2. Probar que G es abeliano.

28. Decidir cuáles de las aplicaciones del Ejercicio 2 son morfismos y cuáles son morfismos si se supone además que el grupo G es abeliano.

29. Hallar todos los morfimos de grupos $f : G \to H$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) G un grupo finito y $H = \mathbb{Z}$.

    b) $G = \mathbb{Z}_5$ y $H = \mathbb{Z}_7$.

    c) $G = \mathbb{Z}$ y $H = \mathbb{Z}_6$.

    d) $G = \mathbb{Z}$ y $H = \mathbb{Q}$.

    e) $G = \mathbb{Q}$ y $H = \mathbb{Z}$.

30. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x)) \mid ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

31. Probar que la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos si y sólo si G es abeliano.

32. Probar que la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos si y sólo si G es abeliano.

33. Probar que no existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

34. Sea $f : G \to H$ un epimorfismo. Decidir para cuáles de las siguientes propiedades P vale que si G verifica P entonces H verifica P.

    (P_1) tener n elementos.

    (P_2) ser finito.

    (P_3) ser conmutativo.

    (P_4) ser no conmutativo.

    (P_5) ser cíclico.

    (P_6) todo elemento tiene orden finito.

35. Repetir el ejercicio anterior en el caso en que $f : G \to H$ es un monomorfismo.

36. Determinar si G y H son isomorfos en los siguientes casos:

    a) $G = \mathbb{Z}_4$ y $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

    b) $G = \mathbb{Z}_n$ y $H = G_n$.

    c) $G = D_3$ y $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

    d) $G = D_3$ y $H = S_3$.

    e) $G = \mathbb{Q}$ y $H = \mathbb{R}$.

37. Sean $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ coprimos dos a dos. Probar que $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_n} \simeq \mathbb{Z}_{m_1 \dots m_n}$. ¿Vale la afirmación para $m_1, \dots, m_n$ cualesquiera?

38. Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.

39. Probar que, salvo isomorfismo, hay sólo dos estructuras de grupo de orden 4.

40. Probar que, salvo isomorfismo, hay sólo dos estructuras de grupo no abeliano de orden 8.

41. Decidir cuáles de los siguientes grupos son son isomorfos entre sí:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_8 \qquad D_4 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{U}_{16} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4, (a, 4) = 1 \right\}$$

42. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si todos los subgrupos propios de un grupo G son finitos entonces G es finito.

    b) Un grupo no puede ser isomorfo a uno de sus subgrupos propios.

    c) Los elementos de orden finito de un grupo forman un subgrupo.