1^{er} *cuatrimestre 2009*

Álgebra II - Práctica 2

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Hallar un sistema de representantes de las clases a derecha y un sistema de representantes de las clases a izquierda de G módulo H en los siguientes casos:

   a) $G = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{Z}$.

   b) $G = GL(n, \mathbb{R})$ y $H = SL(n, \mathbb{R})$.

   c) $G = D_n$ y $H = \langle \rho \rangle$.

   d) $G = D_n$ y $H = \langle s \rangle$.

   e) $G = \mathbb{C}^*$ y $H = S^1$.

   f) $G = \mathbb{C}^*$ y $H = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$.

2. Sean G un grupo y H un subgrupo. Probar la equivalencia de las siguientes condiciones:

   a) $\forall x \in G,\ xH = Hx$.

   b) $\forall x \in G,\ x^{-1}Hx \subset H$.

   c) $\forall x \in G,\ x^{-1}Hx = H$.

3. En cada ítem del Ejercicio 1, decidir si $H \lhd G$.

4. Hallar todos los subgrupos normales de S_4.

5. Sean $H = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\} \subset S_4$ y $K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset S_4$. Probar que $H \lhd K \lhd S_4$ pero $H \not\lhd S_4$.

6. Sea $f : G \to H$ un morfismo. Probar que $\ker(f) \lhd G$ ¿Es necesariamente $\mathrm{im}(f) \lhd H$?

7. Sean G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \lhd G$.

8. Hallar todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

9. Probar que:

   a) $\mathbb{C}^* / S^1 \simeq \mathbb{R}_{>0}$.

   b) $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$.

   c) $\mathbb{Q} / \mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$.

   d) $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$.

   e) $GL_n(\mathbb{C}) / SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$.

f) $S^1/G_n \simeq S^1$.

g) si $m \mid n$, entonces $G_n/G_m \simeq G_{n/m}$.

10. Sean G un grupo y H y K dos subgrupos normales distintos, isomorfos entre sí. ¿Es necesariamente G/H isomorfo a G/K?

11. Sea G un grupo. Probar que si G/C_G es cíclico entonces G es abeliano.

12. Sean G un grupo y H un subgrupo. Probar que $[G;G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ y G/H es abeliano.

13. Sea G un grupo tal que existen dos subgrupos normales H_1 y H_2 con $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ y G/H_1 y G/H_2 abelianos. Probar que G es abeliano.

14. Sean G un grupo, $f : G \to Aut(G)$ definido por $f(a)(g) = aga^{-1}$ y $Int(G) = im(f)$.

    a) Probar que f es un morfismo.

    b) Probar que $G/C_G \simeq Int(G)$.

    c) Probar que $Int(G) \triangleleft Aut(G)$.

15. Sean G un grupo y H y K subgrupos. Probar que si $H \triangleleft G$ o $K \triangleleft G$ entonces HK es un subgrupo de G y $HK = KH$. Probar que si $H \triangleleft G$ y $K \triangleleft G$ entonces $HK \triangleleft G$.

16. Sean G un grupo de orden finito y H y K subgrupos tales que $H \triangleleft G$ o $K \triangleleft G$. Si $(|K|; |G:H|) = 1$, probar que $K \subset H$.

17. Sean G un grupo finito y H y K subgrupos tales que $H \triangleleft G$, $K \triangleleft HK \triangleleft G$ y $(|H|, |K|) = 1$. Probar que $K \triangleleft G$.

18. Probar que S es un factor semidirecto de G en los siguientes casos:

    a) $G = \mathbb{C}^*$ y $S = S^1$.

    b) $G = G_{12}$ y $S = G_3$.

    c) $G = \mathbb{C}$ y $S = \mathbb{R}$.

    d) $G = GL(n, \mathbb{C})$ y $S = SL(n, \mathbb{C})$.

19. Sea $n \geq 3$. Probar que S_n y D_n son isomorfos a productos semidirectos convenientes.

20. ¿Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?

21. Sean H y K grupos y $\varphi : K \to Aut(H)$ un morfismo. Probar que $H \times_\varphi K$ es abeliano si y solo si H y K son abelianos y $\varphi(k) = Id_H$ para todo $k \in K$.

22. Sean H y K grupos y $\varphi_1, \varphi_2 : K \to Aut(H)$ morfismos. Probar que si existe un automorfismo f de K tal que $\varphi_2 = \varphi_1 \circ f$, entonces $H \times_{\varphi_1} K \simeq H \times_{\varphi_2} K$.