Álgebra II - Práctica 3

1. Probar que el grupo G actúa sobre el conjunto X y calcular ${}^{G}X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X en los siguientes casos:

   a) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$.

   b) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$.

   c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$.

2. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de índice 2 y $x \in H$. Probar que si el conjunto $\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ tiene m elementos, el conjunto $\{gxg^{-1} \mid g \in H\}$ tiene m o $m/2$ elementos.

3. Sean G un grupo de orden impar y H un subgrupo normal de orden 5. Probar que $H \subset C_G$.

4. Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que para todo $d \mid n$ existe un subgrupo de orden d.

5. Sean p un número primo y G un grupo abeliano. Probar que si $|G| = p^n$ y todo elemento distinto de la identidad tiene orden p, G es isomorfo a la suma directa de n copias de $\mathbb{Z}_p$.

6. Sea p un número primo. Probar que todo grupo de orden p^2 es abeliano y caracterizar todos los grupos de tal orden.

7. Sea p un número primo y G un grupo no abeliano de orden p^3. Calcular $|C_G|$ y probar que $C_G = [G; G]$.

8. Sean p un número primo y G un grupo. Si $|G| = p^n$, probar que para todo $0 \leq j \leq n$, hay un subgrupo normal de orden p^j.

9. Encontrar todos los subgrupos de Sylow de $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_3, S_3 \times \mathbb{Z}_3$, $S_3 \times S_3$ y $SL_2(\mathbb{Z}_3)$.

10. Sea G un grupo finito y, para cada número primo p, sea H_p un p-subgrupo de Sylow de G. Probar que $G = \langle \cup_p H_p \rangle$.

11. Probar que no existen grupos simples de orden $40, 200, 204, 260, 2540$ o 9075.

12. Sean p y q números primos distintos. Probar que no hay grupos simples de orden pq ni de orden $p^2 q$.

13. Sea G un grupo finito tal que para todo número primo p existe un único p-subgrupo de Sylow.

    a) Probar que G es isomorfo al producto de todos sus subgrupos de Sylow.

    b) Probar que para todo $d \mid |G|$, existe un subgrupo de orden d.

    c) Si e es el exponente de G, probar que existe $x \in G$ tal que $ord(x) = e$.

    d) ¿Son ciertas la afirmaciones anteriores para todo grupo finito G?

14. Probar que todo grupo de orden $17^2 \cdot 19^2$ es abeliano.

15. Sea G un grupo no abeliano de orden 21. Calcular la cantidad de 3-subgrupos y 7-subgrupos de Sylow de G.

16. Sea G un grupo no abeliano de orden 39. Calcular la cantidad de elementos de orden 3 y la cantidad de elementos de orden 13 en G.

17. Probar que no existen grupos simples de orden $24, 36, 48$ o 56.

18. Sea $n \geq 3$ un número impar y sea $G = \{g_1, \ldots, g_{2n}\}$ un grupo de orden $2n$. Sea $\varphi : G \to S_{2n}$ el morfismo definido por $\varphi(g_i)(g_j) = g_i g_j$ y sea $H = \varphi^{-1}(A_{2n})$. Probar que $1 \subsetneq H \subsetneq G$ y que $H \triangleleft G$. Concluir que G no es simple.

19. Sea G un grupo de orden 135. Probar que si G tiene más de un subgrupo invariante de orden 3 entonces G es abeliano y no cíclico.

20. Sean p_1, p_2, p_3 números primos tales que $p_i \nmid p_j - 1$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$ y sea G un grupo de orden $p_1 p_2 p_3$. Probar que G es cíclico.

21. Sea p un número primo. Probar que $\mathcal{U}_p$ es cíclico.

22. Sea p un número primo impar y G un grupo de orden $2p$. Probar que $G \simeq \mathbb{Z}_{2p}$ o $G \simeq D_p$.

23. Sean $p < q$ números primos. Probar que, salvo isomorfismo, hay sólo un grupo de orden pq si $p \nmid q - 1$ y sólo dos grupos de orden pq si $p \mid q - 1$.

24. Probar que, salvo isomorfismo, hay sólo cuatro grupos de orden 30.

25. ¿Existe una serie de composición $\{1\} \triangleleft N_3 \triangleleft N_2 \triangleleft N_1 \triangleleft S_4$ tal que $N_2 \simeq \mathbb{Z}_4$?

26. Probar que todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.