1^{er} *cuatrimestre 2009*

Álgebra II - Práctica 4

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar en cada uno de los siguientes casos que $(A, +, \cdot)$ es un anillo:

   a) $M_n(\mathbb{R})$ con la suma y producto usuales.

   b) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y la suma y producto usuales.

   c) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ con X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X.

   d) $(End(G), +, \circ)$ con G grupo abeliano.

   e) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z},\ a_g \neq 0 \text{ para finitos } g \in G\}$ con G grupo y

   $$\Big(\sum a_g \cdot g\Big) + \Big(\sum b_g \cdot g\Big) = \sum (a_g + b_g) \cdot g\,; \quad \Big(\sum a_g \cdot g\Big) \cdot \Big(\sum b_g \cdot g\Big) = \sum \Big(\sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2}\Big) \cdot g.$$

2. Decidir cuáles de los anillos del ejercicio anterior son conmutativos, dominios, anillos de división o cuerpos.

3. Dar ejemplos de un anillo que no sea dominio y de un dominio que no sea anillo de división.

4. Hallar los divisores de cero y las unidades del anillo $A = \mathcal{C}[0, 1]$ de funciones continuas definidas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

5. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}[X]$.

6. Sea $x \in A$ un elemento nilpotente. Probar que $1 + x$ y $1 - x$ son unidades.

7. Sea A un dominio finito. Probar que A es un anillo de división.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número compuesto. ¿Existe alguna operación $*$ que haga de $(\mathbb{Z}_n, +, *)$ un cuerpo?

9. Sean A un anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Probar que f es divisor de cero en $A[X]$ si y sólo si existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.

10. En cada uno de los siguientes casos, decidir si B es un subanillo de A:

    a) $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Q}$.

    b) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$.

    c) $A = \mathbb{C}$ y $B = \mathbb{Z}[i]$.

    d) $A = \mathbb{Z}[X]$ y $B = \{f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A \mid a_1 = 0\}$.

11. Sea B un subanillo de un anillo A. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) A dominio íntegro $\Rightarrow$ B dominio íntegro.

   b) B dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro.

   c) A cuerpo $\Rightarrow$ B cuerpo.

   d) B cuerpo $\Rightarrow$ A cuerpo.

12. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, decidir si I es un ideal a izquierda y/o a derecha de A:

   a) $A = M_n(\mathbb{R})$ e $I = \{C \in A \mid C_{1i} = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$.

   b) $A = M_n(\mathbb{R})$ e $I = \{C \in A \mid C_{i1} = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$.

13. Hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}[X]$.

14. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\langle a, b \rangle = \langle (a, b) \rangle$.

15. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.

   a) Probar que si $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.

   b) Probar que si d es impar, $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \pmod{2}\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

16. Hallar un ideal de $\mathbb{Z}[X]$ que no pueda generarse por un único elemento.

17. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, decidir si f es un morfismo de anillos:

   a) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z},\ f(g) = g(1)$.

   b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \overline{z}$.

   c) $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f(C) = \det(C)$.

   d) $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p,\ f(m) = m^p$, con p un número primo.

19. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

20. Probar que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad.

21. Hallar todos los morfismos de anillos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

22. Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1 \rangle$ y $\mathbb{R}[X, Y]/\langle XY \rangle$ no son cuerpos.

23. Hallar los divisores de cero y las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3 \rangle$.

24. Sea $I = \langle \overline{X} \rangle \subset \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - X \rangle$. Probar que I es un ideal propio e $I^2 = I$.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar isomorfismos entre los siguientes anillos:

  a) $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$ y $\mathbb{C}$.

  b) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2, X \rangle$ y $\mathbb{Z}_2$.

  c) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i \rangle$ y $\mathbb{Z}_2$.

  d) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$ y $\mathbb{Z}_5$.

  e) $\mathbb{Z}[X]/\langle n \rangle$ y $\mathbb{Z}_n[X]$.

  f) $\mathbb{R}[X, Y]/\langle Y - X^5 \rangle$ y $\mathbb{R}[X]$.

  g) $\mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle Y - X^5, Z - Y^5 \rangle$ y $\mathbb{R}[X]$.

  h) $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$.

  i) $\mathbb{R}[X]/\langle X^4 - 1 \rangle$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

26. Sea A un anillo. Probar que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.