1^{er} cuatrimestre 2009

Álgebra II - Práctica 5

A lo largo de esta práctica, A-módulo significa A-módulo a izquierda.

1. Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción $\cdot$ de A sobre M define en M una estructura de A-módulo:

   a) $A = \mathbb{R}\,,\quad M = \mathbb{C}\,,\quad a \cdot m = am\,.$

   b) $A = \mathbb{R}\,,\quad M = \mathbb{R}^n\,,\quad a \cdot m = am\,.$

   c) $A = M_n(\mathbb{R})\,,\quad M = \mathbb{R}^n\,,\quad a \cdot m = am\,.$

   d) $A = M_n(\mathbb{R})\,,\quad M = \mathbb{R}\,,\quad a \cdot m = \det(a)\, m.$

   e) $A = \mathbb{R}[X]\,,\quad M = \mathbb{R}^n\,,\quad a \cdot (m_1, m_2, \dots, m_n) = (a(1)m_1, a(2)m_2, \dots, a(n)m_n).$

   f) $A = \mathbb{Z}_{nk}\,,\quad M = \mathbb{Z}_n\,,\quad a \cdot m = r_n(am).$

2. Decidir cuáles de los A-módulos del ejercicio anterior son fieles.

3. Sean A y B anillos, M un B-módulo y $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot m = \varphi(a) \cdot m$ define sobre M una estructura de A-módulo.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar en cada uno de los siguientes casos si S es un submódulo del A-módulo M:

   a) $A = \mathbb{R}\,,\quad M = \mathbb{C}\,,\quad S = \mathbb{R}i\,.$

   b) $A = \mathbb{Z}\,,\quad M = M_n(\mathbb{Z})\,,\quad S = \{(a_{ij}) \in M \mid \det(a_{ij}) = 0\}\,.$

   c) A un anillo cualquiera, $\quad M = A^n\,,\quad S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}.$

   d) $A = \mathbb{Z}[X]\,,\quad M = \mathbb{Z}[X]\,,\quad S = \{f \in M \mid f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}\,.$

5. Sean M un A-módulo, S un subconjunto de M y N un submódulo de M. Probar que $(N : S) = \{a \in A \mid as \in N \ \forall s \in S\}$ es un ideal a izquierda de A.

6. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.

7. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $2 < n < m$. Probar en cada uno de los siguientes casos que f es un morfismo de A-módulos:

   a) $A = \mathbb{Z}\,,\quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,,\ f(a) = 2a.$

   b) $A = \mathbb{R}\,,\ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \overline{z}$

c) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^m$, $f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots 0)$.

d) A un anillo cualquiera, $f : A^m \to A^n$, $f(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_n)$.

e) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^2$, $f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 + a_n, a_n)$.

f) A un anillo cualquiera, $f : A^n \to A^n$, $f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n)$.

g) A un anillo cualquiera, fijo $a_0 \in A$, $f : A[X] \to A$, $f(g) = g(a_0)$.

8. En cada uno de los ítems del ejercicio anterior, hallar el núcleo, la imagen y determinar si f es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción y/o isomorfismo.

9. Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-módulos y $f : V \to W$ una función. Probar que f es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos si y sólo si es un morfismo de grupos.

10. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

    a) Si M es simple, $f = 0$ o f es un monomorfismo.

    b) Si N es simple, $f = 0$ o f es un epimorfismo.

    c) Si M y N son simples, $f = 0$ o f es un isomorfismo.

11. Sean M y N dos A-módulos. Probar que

    a) $Hom_A(M, N)$ tiene estructura de $\mathrm{Z}\,A$-módulo mediante la acción $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$.

    b) $Hom_A(A, N) \simeq N$ como $\mathrm{Z}\,A$-módulos.

12. Caracterizar en cada uno de los siguientes casos el A-módulo cociente M/S:

    a) $M = A^n$, $S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.

    b) $M = A[X]$, $S = \{f \in M \mid f(1) = 0\}$.

    c) $M = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij}) \in M \mid a_{i1} = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$.

13. Si M y N son conjuntos y $f : M \to N$ es una función, el subconjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

de $M \times N$ se llama el gráfico de f. Probar que si M y N son A-módulos, f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

14. Sea M un A-módulo.

    a) Probar que si $f \in End_A(M)$ verifica $f^2 = f$, entonces $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

    b) Probar que si M_1 y M_2 son submódulos de M tales que $M = M_1 \oplus M_2$, existe $f \in End_A(M)$ tal que $f^2 = f$, $M_1 = \ker f$ y $M_2 = \operatorname{Im} f$.

15. Hallar todos los pares de submódulos M_1, M_2 del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{18}$ tales que $\mathbb{Z}_{18} = M_1 \oplus M_2$.

16. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas. Probar que:

a) si β es monomorfismo, α es monomorfismo.

b) si β es epimorfismo, γ es epimorfismo.

c) si α y γ son monomorfismos, β es monomorfismo.

d) si α y γ son epimorfismos, β es epimorfismo.

e) si β es epimorfismo y γ monomorfismo, α es epimorfismo.

f) si β es monomorfismo y α epimorfismo, γ es monomorfismo.

g) si dos de los tres morfismos α, β y γ son isomorfismos, el tercero también lo es.

17. Sea

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \to & M & \to & M'' \\ & & & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas. Probar que existe un único morfismo $\alpha : M' \to N'$ que completa el diagrama conmutativo.

18. Sea

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & & & \\ N' & \to & N & \to & N'' & & \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas. Probar que existe un único morfismo $\gamma : M'' \to N''$ que completa el diagrama conmutativo.

19. **Lema de los cinco:** Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & M_4 & \to & M_5 \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & \to & N_4 & \to & N_5 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas.

a) Probar que si β y δ son monomorfismos y α es un epimorfismo, γ es un monomorfismo.

b) Probar que si β y δ son epimorfismos y ϵ es un monomorfismo, γ es un epimorfismo.

c) Concluir que si α, β, δ y ϵ son isomorfismos, γ es un isomorfismo.

20. Probar que

$$0 \;\to\; M_1 \;\overset{f}{\to}\; M_2 \;\overset{g}{\to}\; M_3$$

es una sucesión exacta de A-módulos si y sólo si para todo A-módulo M,

$$0 \;\to\; Hom_A(M, M_1) \;\overset{f_*}{\to}\; Hom_A(M, M_2) \;\overset{g_*}{\to}\; Hom_A(M, M_3)$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos.

21. Probar que

$$M_1 \;\overset{f}{\to}\; M_2 \;\overset{g}{\to}\; M_3 \;\to\; 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos si y sólo si para todo A-módulo M,

$$0 \;\to\; Hom_A(M_3, M) \;\overset{g^*}{\to}\; Hom_A(M_2, M) \;\overset{f^*}{\to}\; Hom_A(M_1, M)$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos.

22. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$ son anillos noetherianos. Decidir si son anillos artinianos.

23. Probar que si A es un anillo noetheriano, $A[X]$ es un anillo noetheriano. Concluir que $k[X_1, \ldots, X_n]$ es noetheriano para todo cuerpo k y todo $n \in \mathbb{N}$.

24. Sean M un A-módulo y $f \in End_A(M)$.

    a) Probar que si para algún $n \in \mathbb{N}$ es $\ker f^n = \ker f^{n+1}$, entonces $\ker f^n \cap \mathrm{Im} f^n = 0$.

    b) Probar que si para algún $n \in \mathbb{N}$ es $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$, entonces $\ker f^n + \mathrm{Im} f^n = M$.

    c) Si M es noetheriano y f es un epimorfismo, f es un automorfismo.

    d) Si M es artiniano y f es un monomorfismo, f es un automorfismo.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcular la longitud del A-módulo M en los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot (m_1, \ldots, m_n) = (am_1, \ldots, am_n)$.

    b) $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_{12}$, $a \cdot m = r_{12}(am)$.

    c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}[X]/\langle X^n \rangle$, $a \cdot m = \overline{am}$.

26. Sea

$$0 \to\; M_1 \;\to\; M_2 \;\to\; \ldots \;\to\; M_n \;\to\; 0$$

una sucesión exacta de A-módulos de longitud finita. Probar que $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \ell(M_i) = 0$.

27. Calcular los elementos de torsión en los A-módulos del Ejercicio 25.

28. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

29. Probar que si M es un A-módulo de torsión y N un A-módulo sin torsión, $Hom_A(M, N) = 0$.