Álgebra II - Práctica 6

1. Hallar la cantidad de grupos abelianos, salvo isomorfismo, de orden 45, 100, 180, 256 y 432.

2. Decidir cuáles de los siguientes grupos son isomorfos:

   $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{540}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{360}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{270}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{180}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{30}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{15}$

3. Hallar los factores invariantes y los divisores elementales del grupo abeliano G en los siguientes casos:

   a) G de orden 36, con exactamente 2 elementos de orden 3 y sin elementos de orden 4.

   b) G de orden menor o igual a 100, con exponente 27 y no cíclico.

   c) G de orden menor o igual a 100, con exponente 24 y más de 3 elementos de orden impar.

4. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados G tales que:

   a) todo subgrupo propio de G es cíclico.

   b) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

   c) para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

5. Hallar el rango, los factores invariantes y los divisores elementales de los siguientes grupos abelianos:

   a) $\mathcal{U}_{36}$.

   b) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \langle (1,-3,0),(1,0,-3) \rangle$.

   c) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \langle (2,-6,0),(1,0,-3) \rangle$.

   d) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \langle (0,6,24,0),(5,2,6,13),(15,8,24,39) \rangle$.

   e) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \mid m_1 + m_2 = 0,\ m_1 + 2m_2 - m_3 = 0\}$.

   f) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \mid m_1 - 3m_2 = 0,\ m_1 - 3m_3 = 0\}$.

   g) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \mid m_1 \text{ es par},\ 2m_1 + 5m_2 - 2m_3 = 0\}$.