

## Algebra II

Más ejercicios para practicar para el recuperatorio del primer parcial.

- (1) Sea  $K$  un cuerpo,  $A = M_n(K)$ ,  $V = K^{n \times 1}$  mirado como  $A$ -módulo a izquierda del modo natural. Probar que  $V$  es un  $A$ -módulo que no es libre. Probar que todo epimorfismo de  $A$ -módulos  $f : M \rightarrow V$  es una retracción.
- (2) Probar que el anillo  $\mathbb{R}[X, Y, Z, W]/(X - YZ, Y - WX)$  no es un dominio íntegro.
- (3) Sea  $G$  un grupo tal que  $Aut(G)$  es cíclico. Probar que  $G$  es abeliano.
- (4) Probar que existen por lo menos dos grupos no abelianos de orden  $3^2 \cdot 7$  no isomorfos entre sí.
- (5) Sea  $A$  un anillo conmutativo y sea  $I$  un ideal de  $A$ . Probar que  $I$  es sumando directo de  $A$  sii  $I^2 = I$  e  $I$  es un ideal principal.
- (6) Sea  $A$  un anillo. Demostrar que  $A$  tiene un único ideal maximal a izquierda si y sólo si los elementos no inversibles forman un ideal a izquierda.
- (7) Construir un grupo no abeliano de orden 56 con un 7-Sylow normal.
- (8) Sean  $G$  un grupo finito y  $H$  un subgrupo de índice 2 en  $G$ . Probar que si  $x \in H$  tal que el conjunto  $\{gxg^{-1} : g \in G\}$  tiene  $m$  elementos entonces el conjunto  $\{gxg^{-1} : g \in H\}$  tiene  $m$  ó  $\frac{m}{2}$  elementos.