Algebra II

Ejercicios para practicar para el recuperatorio del segundo parcial.

(1) Sea $n \geq 2$ y $a \in \mathbb{Z}$. Sea M el grupo abeliano $\mathbb{Z}^n/\langle(a,\ldots,a)\rangle$. Probar que $M \simeq \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

(2) Encontrar todos los grupos abelianos finitos que tienen simultáneamente: exactamente 7 elementos de orden 2; exactamente 8 elementos de orden 3; exactamente 8 elementos de orden 4; por lo menos un elemento de orden 9; ningún elemento de orden p primo para $p \neq 2, 3$.

(3) Sea G un grupo abeliano finitamente generado y sea $x \in G \setminus \{0\}$. Probar que, para algún $p \in \mathbb{N}$ primo, existe un morfismo de grupos $f : G \to G_{p^\infty}$ con $f(x) \neq 0$. (Recordar: $G_{p^\infty} = \cup_{i=0}^{\infty} G_{p^i}$ es el grupo formado por la unión de las raíces p^i-ésimas de la unidad.)

(4) Sea S un $\mathbb{Z}[i]$-submódulo de $(\,\mathbb{Z}[i]\,)^n$ y sea $\{a_1,\ldots,a_n\}$ una base de S. Si $a_j = (a_{j1},\ldots,a_{jn})$, probar que $(\,\mathbb{Z}[i]\,)^n/S$ es un grupo abeliano de orden $|\det(a_{jk})|^2$.

(5) Probar que en el anillo $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no existe un máximo común divisor entre 6 y $2 + 2\sqrt{-5}$. Es decir, probar que no existe un elemento $d \in A$ que satisfaga simultáneamente:
   (1) $d/6$ y $d/2 + 2\sqrt{-5}$.
   (2) si $\alpha \in A$ también satisface que $\alpha/6$ y $\alpha/2 + 2\sqrt{-5}$, entonces α/d.

(6) Sea A un anillo y M y N dos A-módulos. Sean $\mu : N \to M$ y $\epsilon : M \to N$ morfismos de A-módulos tales que $\epsilon \circ \mu : N \to N$ es un isomorfismo. Probar que $M = \mu(N) \oplus \ker(\epsilon)$.

(7) (a) Encontrar un matriz $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ cuyo polinomio minimal sea X^2+X+1.
   (b) Definir un morfismo de grupos $f : D_3 \to GL_2(\mathbb{Z})$ tal que $A \in \operatorname{im}(f)$.
   (c) Mostrar que f define en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ una estructura de $\mathbb{Z}[D_3]$-módulo.
   (d) Calcular $\operatorname{An}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ como $\mathbb{Z}[D_3]$-módulo.

(8) Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-31}]$.
   (a) Definir un morfismo de anillos sobreyectivo $f : A \to \mathbb{Z}_5$.
   (b) Sea I es núcleo de f. Probar que I es un ideal primo de A y encontrar una base de I como $\mathbb{Z}$-módulo.
   (c) ¿Es I un A-módulo libre?
   (d) ¿Es A un dominio principal?

(9) Sea A un anillo conmutativo tal que para cada $a \in A$, existe un entero $n > 1$ (que depende de a) tal que $a^n = a$. Probar que todo ideal primo de A es maximal.