**Algebra II**

Más ejercicios para practicar para el recuperatorio del segundo parcial.

(1) Sea $A$ un anillo conmutativo y sea $M$ un $A$-módulo.
   (1) Si $S$ y $T$ son submódulos de $M$ tales que $M/S$ y $M/T$ son $A$-módulos noetherianos, probar que $M/(S \cap T)$ es un $A$-módulo noetheriano.
   (2) Si $M$ es noetheriano, probar que $A/Ann(M)$ es un $A$-módulo noetheriano. (Sugerencia: Si $X$ es un conjunto de generadores de $M$, entonces $Ann(M) = \bigcap_{x \in X} Ann(x)$.)

(2) Sean $p$ y $q$ primos positivos distintos, sea $G$ un grupo abeliano finito de exponente $p^3q^2$ y sea $H$ un grupo abeliano finito tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\#\{x \in G \ / \ \mathrm{ord}(x) = n\} = \#\{x \in H \ / \ \mathrm{ord}(x) = n\}.$$

Probar que $G$ y $H$ son isomorfos.

(3) Sea $A$ un anillo conmutativo y sea $I$ un ideal de $A$. Probar que $I$ es sumando directo de $A \iff I^2 = I$ e $I$ es un ideal principal.

(4) Sea $A$ un anillo conmutativo. Un elemento $e \in A$ se llama idempotente si $e^2 = e$. Demostrar que si $A$ tiene un único ideal maximal entonces los únicos idempotentes de $A$ son 1 y 0.

(5) Sea $A$ un anillo conmutativo noetheriano y sea $N$ el conjunto formado por todos los elementos nilpotenes. Probar que $N$ es un ideal y que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = \{0\}$.

(6) Probar que $A := \mathbb{C}[X,Y]/ < X^2 + Y^2 - 1 > \simeq \mathbb{C}[X, X^{-1}]$, como anillos. Concluir que $A$ es un dominio de ideales principales.

(7) Probar que si

$$0 \ \to \ M_1 \ \xrightarrow{f} \ M_2 \ \xrightarrow{g} \ M_3$$

es una sucesión exacta de $A$-módulos, entonces para todo $A$-módulo $M$,

$$0 \ \to \ Hom_A(M, M_1) \ \xrightarrow{f_*} \ Hom_A(M, M_2) \ \xrightarrow{g_*} \ Hom_A(M, M_3)$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos. (Aquí: $f_*(h) := f \circ h$.)

(8) Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A$ el subanillo de $M_3(K) = \mathbb{K}^{3\times 3}$,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, \in \mathbb{K} \right\}.$$

Sean

$$M := \mathbb{K}^{3\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{y} \qquad N := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{K} \right\}$$

   (i) Probar que $M$ no es suma directa de dos submódulos propios.
   (ii) Probar que existen $M_1$ y $M_2$, $A$-módulos no nulos tales que $M/N \simeq M_1 \oplus M_2$.

(9) Sea $G =< g >$ un grupo de dos elementos. En $\mathbb{R}$ definimos dos estructuras de $\mathbb{R}[G]$ módulos que denotamos $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_-$. En $\mathbb{R}_+$, $g \cdot a := a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. En $\mathbb{R}_-$, $g \cdot a := -a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(i) Probar que $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}_-$ son $\mathbb{R}[G]$ módulos simples no isomorfos entre sí.

(ii) En $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2\times 2}$ consideramos la estructura de $\mathbb{R}$- espacio vectorial usual y le damos una estructura de $\mathbb{R}[G]$ módulo haciendo que $g$ actue por trasposición; es decir: $g \cdot A := A^t$, $(A \in M_2(\mathbb{R}))$. Probar que $M_2(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}_+)^3 \oplus \mathbb{R}_-$, como $\mathbb{R}[G]$-módulos.