1^{er} cuatrimestre 2001

ALGEBRA III

Práctica 5

1. Hallar elementos primitivos de $E/\mathbb{Q}$, donde E es cuerpo de descomposición del polinomio:
   (i) $X^3 - 2$
   (ii) $X^4 - 2$
   (iii) $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$

2. Hallar un elemento primitivo de $E/\mathbb{Z}_2$, donde E es un cuerpo de 8 elementos.

3. Sea C una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_p$ y sea q un primo distinto de p. Sea L la unión de todos los subcuerpos K de C tales que $[K : \mathbb{Z}_p] = q^i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Probar que $[L : \mathbb{Z}_p] = \infty$ y que toda subextensión propia de $L/\mathbb{Z}_p$ es monógena.

4. Sea E/K una extensión y sea $G = G(E/K)$
   (i) Sea H un subgrupo de G.
   Probar que $E^H = \{x \in E \ / \ f(x) = x \ \forall f \in H\}$ es una subextensión de E/K.
   (ii) Sea F/K una subextensión de E/K.
   Probar que $G_F = \{f \in G \ / \ f(x) = x \ \forall x \in F\}$ es un subgrupo de G
   (iii) Se puede, entonces, construir aplicaciones entre las subextensiones de E/K y los subgrupos de $G(E/K)$.
   Construir explícitamente dichas aplicaciones para $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.
   Notar que son biyectivas y que una es inversa de la otra.¿Qué relación guardan $(G : H)$ y $[E^H : K]$ en ese caso?
   (iv) ¿ Qué pasa con la extensión $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$?

5. Sean E/K y L/K dos extensiones. Probar que si E/K y L/K son isomorfas entonces sus grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca?

6. Caracterizar los grupos de Galois de los cuerpos de descomposición señalados en el ejercicio 2 de la práctica 3.

7. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$
   (i) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$. ¿Es una extensión normal?
   (ii) Caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$ y las subextensiones de grado 2 de $E/\mathbb{Q}$.

8. (i) Sea $E/\mathbb{Z}_7$ una extensión de grado 11. Calcular su grupo de Galois y buscar un generador del grupo.

   (ii) En general: Probar que toda extensión finita de un cuerpo finito es galoisiana con grupo de Galois cíclico y exhibir un generador del grupo.

9. Encontrar una extensión $E/\mathbb{Q}$ tal que su grupo de Galois sea $\mathbb{Z}_6$.

10. (i) Sea ξ_n una primitiva n-ésima de la unidad y $c_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que c_n es irreducible en $K[X]$.
    Probar que $K(\xi_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y que $G(K(\xi_n)/K) \cong \mathcal{U}_n$
    (ii) Probar que $\mathbb{Q}(cos\frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$
    Hallar $f(cos\frac{2\pi}{11}), \mathbb{Q})$
    (iii) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.

11. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Caracterizar $G(K(\xi_{20})/K)$

12. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición de $(X^2-2)(X^2-3)(X^2-5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

13. Sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición del polinomio $X^8 - 2$.
    Calcular $[E : \mathbb{Q}]$ y caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$.

14. Sea $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$. Determinar todas las subextensiones de grado 2.

15. Sea p primo y E/K extensión galoisiana de grado $p^n s$ con $n \in \mathbb{N}$, $(p; s) = 1$.
    (i) Probar que existen subextensiones de grado s de E/K y que dos de ellas son isomorfas.
    (ii) Probar que si $p > s$ hay una única subextensión de grado s que, además, es galoisiana.

16. Sea E/K extensión galoisiana de grado 15. Probar que tiene sólo dos subextensiones propias, calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.

17. Sea E/K galoisiana de grado 45. Si F/K es subextensión de grado 3, entonces es galoisiana.

18. (i) Dada una extensión galoisiana, probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).
    (ii) Determinarla en el caso en que E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

19. (i) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K. Probar que E/K y F/K son abelianas (i.e: galoisianas con grupo de Galois abeliano) si y sólo si $E.F/K$ es abeliana.
    (ii) Exhibir dos subextensiones de grado finito $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ tales que $E.F/\mathbb{Q}$ sea galoisiana pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo sean.

20. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.
    (i) Sea E/K una extensión galoisiana tal que $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
    Probar que $E = K[a, b]$ con $a^2,\ b^2 \in K$.

(ii) Generalizar el item anterior para $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos)

(iii) Sean $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K. Si $x^2 = \alpha,\ z^2 = \beta$, caracterizar $G(K(x,z)/K)$.

21. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de f. Probar que $G(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

22. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ (X trascendente sobre $\mathbb{C}$). Consideremos los automorfismos f y g de E definidos por $g(X) = X^{-1}$ y $f(X) = wX$, donde w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

   (i) $f^n = g^2 = id$ y $fg = gf^{-1}$

   (ii) Deducir que el subgrupo G generado por f y g es D_n.

   (iii) $E^G = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$