1^er^ cuatrimestre 2001

ALGEBRA III

Práctica 8

1. (a) Calcular $N(\sqrt[3]{2})$ y $Tr(\sqrt[3]{2})$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.
   (b) Sea d un entero libre de cuadrados y sea $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] - \mathbb{Q}$.
   Probar que $f(a, \mathbb{Q}) = X^2 - Tr(a)X + N(a)$
   (c) Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$ (p primo).
   (d) Sea K un cuerpo de caracaterística $p > 0$. Calcular la norma y la traza de X en $K(X)/K(X^p)$.
   (e) Sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$ (p primo mayor que 3). Sean $K = \mathbb{Z}_p(u^3, v^2)$ y $E = \mathbb{Z}_p(u, v)$. Calcular $Tr(u + v)$ y $N(u + v)$.

2. Sea $K \subseteq F \subseteq E$ y $x \in E$. Probar que:
   (a) $N_{E/K}(x) = N_{F/K}(N_{E/F}(x))$
   (b) $Tr_{E/K}(x) = Tr_{F/K}(Tr_{E/F}(x))$

3. Probar que:
   (a) E/K separable sii $Tr : E \to K$ es una aplicación no nula.
   (b) Si E/K separable, entonces $Tr : E \to K$ es suryectiva.
   (c) $Tr : E \times E \to K$ definida por $Tr(a, b) = Tr(ab)$ es una forma bilineal simétrica.
   (d) Si E/K es separable, entonces la forma definida en el item anterior identifica a E con su dual.

4. Sea K un cuerpo de caracterstica $p > 0$ y sea E/K extensión de grado q, con q primo distinto de p. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q - 1$ de $f(\alpha, K)$ es nulo.

5. Calcular núcleo e imagen del morfismo de grupos de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}^*$ inducido por la aplicación $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

6. Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.

7. Sea L/K extensión finita sobre un cuerpo finito. Probar que la norma y la traza son suryectivas.

8. Sea E/K extensión cíclica de grado $n = m.r$ tal que existe $c \neq 0$ en K y $c^r = N_{E/K}(u)$ para algún $u \in E$. Sea F es la única subextensión de grado r. Probar que existe $v \in F$ tal que $c = N_{F/K}(v)$.

9. Sea L/K extensión separable de grado n coprimo con la caracterstica de K y sea $x \in L$. Probar que, si $Tr(x^i) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n$, entonces $x = 0$.

10. Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ no nulo. Probar que $X^p - X - a$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$.