ALGEBRA III

Práctica 9

NOTA: $\mathrm{trdeg}_K E = \mathrm{trdeg}(E/K)$.

1. Probar que, con regla y compás, no se puede dividir en 3 partes iguales el ángulo de un triángulo equilátero.

2. Dado un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 cm, probar que se puede construir otro con las mismas proporciones que el original y cuya área sea $\sqrt{35}$ cm^2.

3. Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K(t_1, \ldots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n})]$.

4. Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

5. Sea E/K una extensión y F/K una subextensión de E/K.

   Probar que $\mathrm{trdeg}_K E = \mathrm{trdeg}_F E + \mathrm{trdeg}_K F$.

6. Sea p primo, $p \neq 2$, sea $K = \mathbb{Z}_p(u, v)$ donde $\{u, v\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$ y sea α una raíz de $f = X^{2p} - uvX^p + v$ en una clausura algebraica C/K.

   (i) Probar que $K(\alpha)/K$ no es normal.

   (ii) Si E/K es un cuerpo de descomposición de f, hallar $[E : K]$.

   (iii) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea $E = K(u, v)$, donde $\{u, v\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre K. Si $F = K(u^p, v^p)$, probar que $[E : F] = p^2$ y que E/F no admite elemento primitivo. Determinar la clausura separable de F en E.

7. CS.- *Conjetura de Schanuel: Si $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{C}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces* $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1, e^{x_1}, \ldots, x_d, e^{x_d}) \geq d$.

   C4.- *Conjetura de las 4 exponenciales: Si $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes e $y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ entonces en $\{e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_1 y}, e^{x_1 y}\}$ hay por lo menos un elemento trascendente sobre $\mathbb{Q}$.*

   CG.- *Conjetura de Gelfond: Sea $\overline{\mathbb{Q}}$ la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$. Si $a \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0,1\}$ y $x_0 = \mathrm{log} a, x_1 = b_1 \mathrm{log} a, \ldots, x_d = b_d \mathrm{log} a$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces* $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_0, x_1, \ldots, x_d, a, a^{b_1}, \ldots, a^{b_d}) \geq d + 1$.

   (i) Probar que CS.- implica que e y π son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

   (ii) Probar que CS.- implica C4.-

   (iii) Probar que CS.- implica CG.-