1^{er} cuatrimestre 2002

ALGEBRA III

Práctica 2

Nota: $f(\alpha, K) = \mathrm{irr}(\alpha, K)$ denota el polinomio minimal de α sobre el cuerpo K y ξ_n denota una raíz $n-$ésima primitiva de la unidad.

1. Sea E/K una extensión y $\alpha \in E$ algebraico sobre K. Dada F/K una subextensión de E/K, probar que $f(\alpha, F)/f(\alpha, K)$. Dar ejemplos con $f(\alpha, F) = f(\alpha, K)$ y con $f(\alpha, F) \neq f(\alpha, K)$.

2. Calcular:
   (i) $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$
   (ii) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$
   (iii) $[\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]]$

3. Calcular $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$; $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$; $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$; $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i])$; $f(w, \mathbb{R})$ $(w \in \mathbb{C})$; $f(cos(\frac{2\pi}{7}), \mathbb{Q})$.

4. (i) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ ¿Qué relación hay entre las dos extensiones?
   (ii) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Hallar $a \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$.

5. Probar que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Calcular $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

6. Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Caracterizar las extensiones cuadráticas (i.e. de grado 2) de K.

7. Sea A un dominio de integridad y L un subcuerpo de A tal que todo elemento de A es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes en L. Probar que A es un cuerpo.

8. Sea a_b una raíz del polinomio $X^2 + bX + b^2$ $(b \in \mathbb{Q})$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[a_b]/\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}[a_b] : \mathbb{Q}]$.

9. Sea F/K una extensión de grado impar. Probar que si $F = K[u]$ entonces $F = K[u^2]$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n; 6) = 1$. Sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ de grado n.
    Probar que $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$.

11. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K. Probar que si $[L.M : K] = [L : K].[M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

12. Sea $a \in \mathbb{C}$ una raíz de $X^3 - 2X + 2$ y sea $b = a^2 - a$. Probar que $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[b]$ y calcular $f(b, \mathbb{Q})$.

13. (i) Sea p un primo positivo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$. Deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
    (ii) Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$

(iii) Probar que $f(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

14. Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$. Deducir que $\mathbb{Q}[\xi_5]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

15. Sea p un primo positivo y $a \notin \mathbb{Q}^p$.

    (i) Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.

    (ii) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

16. (i) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

    (ii) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.

    (iii) Probar que hay no numerables elementos trascendentes en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

17. Sea $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.

    (i) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}]$. Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 que tiene esta extensión.

    (ii) Deducir de lo anterior $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{Q}]$.

    (iii) ¿ $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$?

18. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?.

19. Sea K un cuerpo y sea t trascendente sobre K.

    (i) Describir $K(t)/K(t^3)$

    (ii) Calcular $f(t, K(t^n))$

20. Sea E/K una extensión y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

    (i) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ ó xy es trascendente sobre K.

    (ii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.

    (iii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces xy es trascendente sobre K.

21. Sea K un cuerpo y $f \in K[X]$ no constante. Probar que $[K(X) : K(f)] = gr\, f$.

22. (i) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (de hecho, vale la igualdad).

    (ii) Sea d libre de cubos. Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}] \to \mathbb{C}$ pero en general $f(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$.

    (iii) Sea d como en el ítem anterior. Considerar $\mathbb{Q}[\xi_3, \sqrt[3]{d}]$. ¿Qué pasa ahora?

Ejercicio para entregar el 2-4-02

Pruebe que $\mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{r \in \mathbb{C} : r \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ que no es finita.