ALGEBRA III

Práctica 3

Definición: Si E/K es una extensión de cuerpos, llamamos grupo de Galois de E/K al conjunto

$$G(E/K) = \{\sigma : E \to E \mid \sigma \text{ es automorfismo y } \sigma_{/K} = id_K\}.$$

$G(E/K)$ es un grupo con la composición.

1. Sea E/K extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se descompone linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

2. Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$, es también un cuerpo de descomposición de f pensado en $L[X]$.

3. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

   (i) $X^3 - 10$ sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

   (ii) $X^4 - 5$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

   (iii) $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$ sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n$ primos distintos.

   (iv) $X^3 - 2$ sobre $\mathbb{Z}_7$.

   (v) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ sobre $\mathbb{Z}_5$.

   (vi) $X^p - a$ sobre $\mathbb{Q}$, con p primo y $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$.

   (vii) $X^n - t$ sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$

4. Sea $f = X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Sea $C/\mathbb{Z}_3$ una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_3$ y $\alpha \in C$ una raíz de f. Probar que $\mathbb{Z}_3(\alpha)/\mathbb{Z}_3$ es normal.

5. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

6. Sea $f = (X^2 + 1)(X^2 + X - 1) \in \mathbb{Z}_3[X]$. Calcular un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Z}_3$ y determinar su grupo de Galois.

7. Caracterizar los cuerpos de descomposición de $X^3 + 2X + 1$ y de $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre $\mathbb{Z}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{Z}_3$.

8. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{Z}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

9. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$

(i) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la aplicación $f : K \to K$ definida por $f(x) = x^{p^n}$ es un $\mathbb{Z}_p$-morfismo de cuerpos.

(ii) Probar que si K es finito, entonces f es automorfismo.

10. Probar que los cuerpos finitos no son algebraicamente cerrados.

11. Sea $(G, .)$ un grupo finito. Se define el *exponente de G* como:

$$exp(G) = \ min\{n \in \mathbb{N} \ / \ x^n = 1 \ \forall x \in G \ \}$$

Probar que:

(i) Si G es cíclico, $exp(G) = |G|$ ($|G|$ es el orden de G)

(ii) Si G es grupo abeliano finito, entonces existe $x \in G$ tal que $exp(G) = |x|$

(iii) Si K es un cuerpo finito de m elementos, entonces K^* es cíclico de orden $m - 1$. (Sug: si $r = exp(K^*) \Rightarrow x^{r+1} = x \forall x \in K$)

(iv) Toda extensión finita de un cuerpo finito es normal.

12. Dar ejemplos de extensiones con grupo de Galois trivial que no sean normales.

13. Caracterizar $G(E/\mathbb{Z}_2)$ para los cuerpos E de 4 y 8 elementos.

14. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_7$.

15. Determinar si las siguientes extensiones son normales, calcular $G(E/K)$ y $Hom(E/K, C/K)$ donde C es una clausura algebraica de K:

(i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$

(ii) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

(iii) $\mathbb{Z}_3[a]/\mathbb{Z}_3$ con a raíz de $X^3 + X + 2$

16. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.

17. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K. Probar que $E.F/K$ y $E \cap F/K$ son normales.

18. Probar que toda extensión generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de n se cumple que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio para entregar el 16-4-02

Sean K un cuerpo y p un número primo. Probar que el polinomio $f = X^p - a \in K[X]$ es irreducible si, y sólo si, f no tiene raíces en K.