ALGEBRA III

Práctica 4

1. Sea K un cuerpo. Probar que los grupos $(K,+)$ y $(K^*,\cdot)$ nunca son isomorfos.

2. Sea E/K extensión y F/K una subextensión. Probar que:

   (i) Si $x \in E$ es separable sobre K entonces lo es sobre F.

   (ii) E/K es separable si y sólo si E/F y F/K lo son.

   (iii) $x \in E$ es separable sobre K si y sólo si $K(x)/K$ es separable.

3. Probar que toda extensión algebraica de un cuerpo de característica 0 es separable.

4. Probar que toda extensión algebraica de un cuerpo finito es separable.

5. Sea E/K una extensión separable que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ de grado n. Probar que $[E:K]/n!$.

6. Sea p primo y sea t trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Probar que $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p(t)[X]$.

7. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Si $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$, probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

8. Dar ejemplos de extensiones no separables.

9. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sea $\{u, v\}$ indeterminadas independientes sobre K. Sea $f = X^{2p} + uvX^p + u \in K(u,v)[X]$. Probar que la extensión $K(u,v)[X]/\langle f\rangle$ es de grado $2p$ sobre $K(u,v)$ y no es separable ni puramente inseparable.

10. Sea $\{u, v\}$ indeterminadas independientes sobre $\mathbb{Z}_p$

    (i) Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de $\mathbb{Z}_p(u,v)/\mathbb{Z}_p(u^p, v^p - v - u)$.

    (ii) Idem para $\mathbb{Z}_p(u,v)/\mathbb{Z}_p(u^p - u, v^p - v)$.

11. Sea $K = \mathbb{Z}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$, C/K una clausura algebraica, $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y $\alpha \in C$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Sea $m = max\{k \in \mathbb{N}_0 \ / \ p^k | r\}$. Probar que $[K(\alpha)/K]_{ins} = p^m$.

12. Sea K un cuerpo de característica p. Sea C/K una clausura algebraica y sea $G = G(C/K)$.

    Sea $K^{p^{-\infty}} = \{x \in C \ / \ f(x) = x \ \forall f \in G\}$.

    <u>*Definición:*</u> Un cuerpo K se dice *perfecto* sii $K^{p^{-\infty}} = K$

    Probar que:

(i)

$$K^{p^{-\infty}} = \begin{cases} K & \text{si } p = 0 \\ \{x \in C \ / \ x^{p^n} \in K \text{para algún } n \in \mathbb{N}\} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

(ii) Probar que la construcción de $K^{p^{-\infty}}$ no depende de la clausura algebraica elegida.

13. Sea K de característica $p > 0$. Probar que K es perfecto si y sólo si el morfismo $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^p$ es automorfismo. Deducir que todo cuerpo finito es perfecto.

14. (i) Probar que K es perfecto si y sólo si toda extensión algebraica de K es separable.

    (ii) Probar que si K no es perfecto entonces $\left[K^{p^{-\infty}} : K\right] = \infty$.

15. Probar que $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y que $C/K^{p^{-\infty}}$ es normal y separable.

16. Probar que si K es un cuerpo de característica positiva entonces $K(X)$ no es perfecto.

17. Sea K un cuerpo y sea E/K una extensión algebraica.

    (i) Probar que si K es perfecto entonces E es perfecto.

    (ii) Probar que si E es perfecto y E/K separable entonces K es perfecto.

    (iii) Probar que si $[E : K] < \infty$ y E es perfecto entonces E/K es separable.

Ejercicio para entregar el 30-4-02

Sea $K = \mathbb{Z}_p(u)$, donde p es primo distinto de 2 y u trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sea C/K una clausura algebraica y $\alpha \in C$ una raíz de $f = X^{p^3} - uX^p + u \in K[X]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.