

ALGEBRA III
Práctica 7

1. (a) Calcular $N(\sqrt[3]{2})$ y $Tr(\sqrt[3]{2})$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.
 (b) Sean $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] - \mathbb{Q}$. Probar que $f(a, \mathbb{Q}) = X^2 - Tr(a)X + N(a)$.
 (c) Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$ (p primo).
 (d) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Calcular la norma y la traza de X en $K(X)/K(X^p)$.
 (e) Sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre \mathbb{Z}_p (p primo mayor que 3). Sean $K = \mathbb{Z}_p(u^3, v^2)$ y $E = \mathbb{Z}_p(u, v)$. Calcular $Tr(u+v)$ y $N(u+v)$.
2. Sea $K \subseteq F \subseteq E$ y $x \in E$. Probar que:
 - (a) $N_{E/K}(x) = N_{F/K}(N_{E/F}(x))$
 - (b) $Tr_{E/K}(x) = Tr_{F/K}(Tr_{E/F}(x))$
3. Probar que:
 - (a) E/K separable si, y sólo si, $Tr : E \rightarrow K$ es una aplicación no nula.
 - (b) Si E/K separable, entonces $Tr : E \rightarrow K$ es suryectiva.
 - (c) $Tr : E \times E \rightarrow K$ definida por $Tr(a, b) = Tr(ab)$ es una forma bilineal simétrica.
 - (d) Si E/K es separable, entonces la forma definida en (c) identifica a E con su dual.
4. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K extensión de grado q , con q primo, $q \neq p$. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q-1$ de $f(\alpha, K)$ es nulo.
5. Calcular núcleo e imagen del morfismo de grupos de \mathbb{C}^* en \mathbb{R}^* inducido por la aplicación $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
6. Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.
7. Sea L/K extensión finita sobre un cuerpo finito. Probar que la norma y la traza son suryectivas.
8. Sea E/K extensión cíclica de grado $n = m \cdot r$ tal que existe $c \neq 0$ en K y $c^r = N_{E/K}(u)$ para algún $u \in E$. Sea F la única subextensión de grado r . Probar que existe $v \in F$ tal que $c = N_{F/K}(v)$.
9. Sea L/K extensión separable de grado n coprimo con la característica de K y sea $x \in L$. Probar que, si $Tr(x^i) = 0 \forall 1 \leq i \leq n$, entonces $x = 0$.
10. Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ no nulo. Probar que $X^p - X - a$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$.

Ejercicio para entregar el 11-06-02

Sean $K = \mathbb{Z}_7(u^7 - u)$ y $E = \mathbb{Z}_7(u)$ con u trascendente sobre \mathbb{Z}_7 .

1. Hallar una base del núcleo de la transformación lineal $Tr : E \rightarrow K$.
2. Encontrar una base de E como K -espacio vectorial, formada por elementos de traza 1.