

ALGEBRA III
Práctica 8

1. Determinar la única subextensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$ (p primo distinto de 2).
2. (i) Demostrar que toda extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ está contenida en una extensión ciclotómica.
(ii) En cada uno de los siguientes casos, exhibir una extensión ciclotómica $E/\mathbb{Q}$ tal que $F \subseteq E$:

$$a) F = \mathbb{Q}[\sqrt{6}] \quad b) F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}] \quad c) F = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$$

$$d) F/\mathbb{Q} \text{ cuerpo de descomposición de } X^{10} + 3X^8 - X^2 - 3$$

3. Sea $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $X^3 + X + 1$. Probar que $X^4 - 6X^2 + 40$ es reducible en $E[X]$.
4. Encontrar las subextensiones de $\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}$ y de $E/\mathbb{Z}_p$, siendo E un cuerpo de descomposición de $X^8 - 1$.
5. Para cada primo positivo p , caracterizar $G(E, \mathbb{Q}(\xi_p))$, donde E es cuerpo de descomposición de $f = X^{10} - X^5 + 1$.
6. Sea p primo y $f = X^5 + pX^3 + p$. Si $E/\mathbb{Q}$ es el cuerpo de descomposición de f , probar que $G(E/\mathbb{Q})$ contiene subgrupos de orden 2 no invariantes.
7. Sea K un cuerpo, $f \in K[X]$ de grado n y E cuerpo de descomposición de f . Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.
8. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son radicales:

$$(i) \mathbb{Q} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, i + \sqrt{3} \right) / \mathbb{Q}$$

$$(ii) K(t_1, t_2)/K(s_1, s_2), \text{ con } K \text{ cuerpo de característica } 0, \{t_1, t_2\} \text{ variables independientes sobre } K \text{ y } \{s_1, s_2\} \text{ los polinomios simétricos elementales.}$$

$$(iii) E/\mathbb{Q} \text{ cuerpo de descomposición de } f = (X^4 - 2)(X^2 - 5).$$

9. (i) Sea p primo. Sea $H \subseteq S_p$ subgrupo que contiene una transposición y una permutación de orden p . Probar que $H = S_p$.
(ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado p (primo) y $E \subseteq \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f . Probar que si f tiene exactamente 2 raíces no reales en $\mathbb{C}$, entonces $G(E/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.

Ejercicio para entregar el 25-06-02

- (i) Sea $m \in \mathbb{N}$ par, sean $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ enteros pares, con $r > 3$ impar.
Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1) \dots (X - a_r) - 2$. Probar que f tiene exactamente 2 raíces no reales en $\mathbb{C}$ y que es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
- (ii) Sea $f = X^5 - 12X^4 + 46X^3 - 72X^2 + 88X - 98 \in \mathbb{Q}[X]$ y sea $E \subseteq \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f . Probar que $E/\mathbb{Q}$ no es resoluble por radicales.