ALGEBRA III
Práctica 9

NOTA: $\mathrm{trdeg}_K E = \mathrm{trdeg}(E/K) =$ grado de trascendencia de E/K.

1. Probar que, con regla y compás, no se puede dividir en 3 partes iguales el ángulo de un triángulo equilátero.

2. Dado un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 cm, probar que se puede construir otro con las mismas proporciones que el original y cuya área sea $\sqrt{35}$ cm^2.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que un ángulo de n grados es construíble si, y sólo si, n es múltiplo de 3.

4. Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K(t_1, \ldots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n})]$.

5. Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

6. Sea E/K una extensión y F/K una subextensión de E/K.

   Probar que $\mathrm{trdeg}_K E = \mathrm{trdeg}_F E + \mathrm{trdeg}_K F$.

7. CS.- *Conjetura de Schanuel: Si $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{C}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1, e^{x_1}, \ldots, x_d, e^{x_d}) \geq d$.*

   C4.- *Conjetura de las 4 exponenciales: Si $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes e $y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ entonces en $\{e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_1 y}, e^{x_1 y}\}$ hay por lo menos un elemento trascendente sobre $\mathbb{Q}$.*

   CG.- *Conjetura de Gelfond: Sea $\overline{\mathbb{Q}}$ la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$. Si $a \in \overline{\mathbb{Q}} - \{0, 1\}$ y $x_0 = \mathrm{log} a, x_1 = b_1 \mathrm{log} a, \ldots, x_d = b_d \mathrm{log} a$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_0, x_1, \ldots, x_d, a, a^{b_1}, \ldots, a^{b_d}) \geq d + 1$.*

   (i) Probar que CS.- implica que e y π son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

   (ii) Probar que CS.- implica C4.-

   (iii) Probar que CS.- implica CG.-

Ejercicio para entregar el 4-07-2002

Sea C/K una extensión no algebraica tal que C es un cuerpo algebraicamente cerrado.

a) Probar que para toda base de trascendencia B de C/K, $K(B) \neq C$.

b) Probar que todo elemento de C/K es trascendente sobre K si, y sólo si, K es algebraicamente cerrado.