

# ÁLGEBRA III

## Práctica 3 – Primer Cuatrimestre de 2003

### Cuerpos de descomposición, extensiones normales y grupo de Galois

**Ejercicio 1.** Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
- ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
- iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
- iv) Toda extensión de grado finito es normal.
- v) Toda extensión de grado finito tiene una clausura normal de grado finito.
- vi) Todo  $K$ -morfismo  $f : L/K \rightarrow L/K$  es un  $K$ -automorfismo.
- vii) Sea  $L/K$  una extensión algebraica. Todo  $K$ -endomorfismo  $f : L/K \rightarrow L/K$  es un  $K$ -automorfismo.
- viii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.
- ix) Toda extensión con grupo de Galois trivial es normal.
- x) Todo grupo de Galois es abeliano.
- xi) El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.
- xii) Sean  $K \subseteq L \subseteq E$ . Si  $E$  es el cuerpo de descomposición de un polinomio  $f \in K[X]$  entonces  $E$  es el cuerpo de descomposición de  $f$  visto como polinomio en  $L[X]$ .

**Ejercicio 2.** Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

- i)  $X^p - a$ , sobre  $\mathbb{Q}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  primo y  $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$ .
- ii)  $X^3 - 10$ , sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  y  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ .
- iii)  $X^4 - 5$ , sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$  y  $\mathbb{Q}[i]$ .
- iv)  $X^4 + 2$ , sobre  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}[i]$ .
- v)  $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$ , sobre  $\mathbb{Q}$ , con  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$  primos distintos.
- vi)  $X^3 - 2$ , sobre  $\mathbb{Z}_7$ .
- vii)  $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$ , sobre  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  y sobre  $\mathbb{Z}_5$ .
- viii)  $X^n - t$ , sobre  $\mathbb{C}(t)$ , con  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .
- ix)  $X^4 - t$ , sobre  $\mathbb{R}(t)$ , con  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 3.** Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios  $X^3 + 2X + 1$  y  $X^3 + X^2 + X + 2$  sobre  $\mathbb{Z}_3$ . Probar que son isomorfos como extensiones de  $\mathbb{Z}_3$ .

**Ejercicio 4.** Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre  $\mathbb{Z}_5$  ¿Son isomorfos entre ellos?

**Ejercicio 5.** Sea  $K$  un cuerpo de característica  $p \neq 0$ .

- i) Probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f : K \rightarrow K$  definido por  $f(x) = x^{p^n}$  es un  $\mathbb{Z}_p$ -morfismo de cuerpos.
- ii) Probar que si  $K$  es un cuerpo finito de característica  $p$ , entonces el morfismo  $f$  definido en i) es un automorfismo. Dar ejemplos de  $K$  infinito con esta propiedad.

**Ejercicio 6.** Sea  $K$  el cuerpo de descomposición de  $X^{p^n} - X$  sobre  $\mathbb{Z}_p$ . Probar que  $[K : \mathbb{Z}_p] = n$ .

**Ejercicio 7.** Caracterizar  $G(L/\mathbb{Z}_2)$  para  $L$  tal que  $[L : \mathbb{Z}_2] = 2, 3$ .

**Ejercicio 8.** Determinar el cuerpo de descomposición de  $X^4 - 10X^2 + 5$  y su grupo de Galois, sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_3$  y  $\mathbb{Z}_7$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $E/K$  un cuerpo de descomposición de  $f \in K[X]$ ,  $f \neq 0$ , y sea  $F/K$  una subextensión de  $E/K$ . Probar que todo morfismo de  $F/K$  en  $E/K$  puede ser extendido a un automorfismo de  $E/K$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $E/K$  una extensión separable que es cuerpo de descomposición de un polinomio  $f \in K[X]$  y sea  $n = \text{gr}(f)$ . Probar que  $[E : K] \mid n!$ . Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad, y donde no se cumpla.

**Ejercicio 11.** Determinar cuáles de las siguientes extensiones  $E/K$  son normales. En cada caso calcular  $G(E/K)$  y  $\text{Hom}(E/K, C/K)$ , donde  $C$  es una clausura algebraica de  $K$ .

- i)  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]/\mathbb{Q}$
- ii)  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$
- iii)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$
- iv)  $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  primo
- v)  $\mathbb{Z}_3[a]/\mathbb{Z}_3$ , con  $a$  raíz de  $X^3 + X^2 + 2X + 1$

**Ejercicio 12.** Sea  $K$  un cuerpo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $t$  trascendente sobre  $K$ . Probar que  $K(t)/K(t^n)$  es normal si y sólo si el polinomio  $X^n - 1$  se factoriza linealmente en  $K[X]$ .

**Ejercicio 13.**

- i) Probar que  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  y  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$  son normales, pero  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$  no lo es (luego, las extensiones normales no son una clase distinguida). Calcular  $G(\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q})$ .
- ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

**Ejercicio 14.** Sean  $E/K$  y  $F/K$  subextensiones normales de una extensión  $H/K$ . Probar que  $E \cdot F/K$  y  $E \cap F/K$  son normales.

**Ejercicio 15.** Probar que toda extensión  $E/K$  generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que toda extensión de grado  $n$  sobre  $\mathbb{Q}$  es normal?

**Ejercicio 16.** Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo,  $p \neq 2$ . Sea  $K = \mathbb{Z}_p(u, v)$ , donde  $\{u, v\}$  es una familia algebraicamente independiente sobre  $\mathbb{Z}_p$  y sea  $\alpha$  una raíz de  $f = X^{2p} - uvX^p + v$  en una clausura algebraica  $C/K$  de  $K$ .

- i) Probar que  $K(\alpha)/K$  no es normal.
- ii) Sea  $E/K$  un cuerpo de descomposición de  $f$ . Hallar  $[E : K]$ .

**Ejercicio 17.** Probar que  $G(K(X)/K) \simeq \text{GLP}$ , donde  $\text{GLP}$  denota el grupo lineal proyectivo ( $\text{GLP} \simeq \text{GL}(2, K)/(a \cdot \text{Id})$  con  $a \neq 0$ ).

**Ejercicio 18.**

- i) Sea  $E/K$  una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en  $K[X]$  se factoriza linealmente en  $E[X]$ . Probar que  $E$  es algebraicamente cerrado.
- ii) Sea  $K$  un cuerpo infinito y sea  $E/K$  una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en  $K[X]$  tiene una raíz en  $E$ . Probar que  $E$  es algebraicamente cerrado.

**Ejercicio 19.** Sea  $E/K$  una extensión de  $K$  y sea  $G = G(E/K)$ .

- i) Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Probar que  ${}^H E = \{t \in E / f(t) = t \forall f \in H\}$  es una subextensión de  $E/K$ .
- ii) Sea  $F/K$  una subextensión de  $E/K$ . Probar que  $G_F = \{f \in G / f(t) = t \forall t \in F\}$  es un subgrupo de  $G$ .
- iii) De acuerdo a i) y ii), podemos definir aplicaciones entre subextensiones de  $E/K$  y subgrupos de  $G(E/K)$ . Construir explícitamente dichas aplicaciones para la extensión de cuerpos  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$ . Notar que son biyectivas y que una es la inversa de la otra. ¿Qué relación guardan  $(G : H)$  y  $[{}^H E : K]$  en este caso?
- iv) ¿Qué pasa en el caso de la extensión  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$ ?