Álgebra III

Práctica 5 – Primer Cuatrimestre de 2003

Extensiones separables y puramente inseparables. Cuerpos perfectos.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión algebraica. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decidir si es verdadera o falsa. Justificar.

i) Si $t \in E$ es separable sobre K, entonces t^n es separable sobre K para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $t^n \in E$ es separable sobre K para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces t es separable sobre K.

iii) Toda extensión separable es normal.

iv) Toda extensión normal es separable.

v) Si E/K es separable, entonces es monógena.

Ejercicio 2. Sea E/K una extensión algebraica. Probar que:

i) Si $\mathrm{car}(K) = 0$, entonces E/K es separable.

ii) Si K es finito, entonces E/K es separable.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $f(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 4.

i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea t un elemento trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Probar que $X^p - t$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p(t)[X]$.

ii) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$, y sean $a \in K - K^p$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que $X^{p^n} - a$ es irreducible en $K[X]$.

iii) Dar ejemplos de extensiones no separables.

Ejercicio 5. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sea $\{ u, v \}$ una familia algebraicamente independiente sobre K. Sea $f = X^{2p} + uvX^p + u \in K(u, v)[X]$. Sea α una raíz de f en una clausura algebraica de $K(u, v)$. Probar que:

i) $[K(u, v)(\alpha) : K(u, v)] = 2p$.

ii) $K(u, v)(\alpha)/K(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.

Ejercicio 6. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean

$$E_s = \{a \in E : a \text{ es separable sobre } K\},$$
$$E_i = \{a \in E : a^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Probar que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E es separable sobre E_i.

Ejercicio 7. Sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las extensiones siguientes:

i) $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p, v^p - v - u)$.

ii) $\mathbb{Z}_p(u, v)/\mathbb{Z}_p(u^p - u, v^p - v)$.

Ejercicio 8. Sea $K = \mathbb{Z}_p(t)$, donde $p \in \mathbb{N}$ es primo y t es trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea α una raíz de $X^{p^n} - t\,X^r + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K. Probar que el grado de inseparabilidad de $K(\alpha)/K$ es p^m con $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid r\}$.

Ejercicio 9. Sea $K = \mathbb{Z}_p(t)$, donde $p \in \mathbb{N}$ es primo, $p \neq 2$, y t es trascendente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sea α una raíz de $X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$ en una clausura algebraica de K. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica p. Sea C una clausura algebraica de K y sea $G = G(C/K)$. Se define

$$K^{p^{-\infty}} = \{x \in C : \sigma(x) = x \;\forall\, \sigma \in G\}.$$

i) Probar que:

   (a) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

   (b) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in C : x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Probar que la construcción de $K^{p^{-\infty}}$ no depende de la clausura algebraica elegida.

Ejercicio 11. Un cuerpo K de característica p se dice *perfecto* si $K^{p^{-\infty}} = K$.

i) Probar que todo cuerpo de característica 0 es perfecto.

ii) Sea K un cuerpo de característica $p > 0$. Probar que K es perfecto si y sólo el morfismo $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^p$ es un automorfismo.

iii) Deducir que todo cuerpo finito es perfecto.

iv) Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

Ejercicio 12. Sea K un cuerpo de característica p y sea C una clausura algebraica de K. Probar que:

i) $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto.

ii) $C/K^{p^{-\infty}}$ es de Galois.

Ejercicio 13. Probar que K es perfecto si y sólo si toda extensión algebraica de K es separable.

Ejercicio 14. Probar que si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(X)$ no es perfecto.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo y sea E/K una extensión algebraica.

i) Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Probar que si $[E : K] < \infty$ y E es perfecto, entonces E/K es separable.