Álgebra III

Práctica 6 – Primer Cuatrimestre de 2003

Norma y traza.

Ejercicio 1.

i) Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3\,]/\mathbb{Q}$.

ii) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$.

iii) Sea d un entero libre de cuadrados y sea $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,] - \mathbb{Q}$.
Probar que $f(a, \mathbb{Q}) = X^2 - \mathrm{Tr}(a)\, X + N(a)$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea X trascendente sobre K. Calcular la norma y la traza de X en $K(X)/K(X^p)$.

Ejercicio 3. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo mayor que 3 y sea $\{u, v\}$ una familia algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}_p$. Sean $K = \mathbb{Z}_p(u^3, v^2)$ y $E = \mathbb{Z}_p(u, v)$. Calcular la norma y la traza de $u + v$ en E/K.

Ejercicio 4. Sean $K \subseteq F \subseteq E$ y $x \in E$. Probar que:

i) $N_{E/K}(x) = N_{F/K}\left(N_{E/F}(x)\right)$.

ii) $\mathrm{Tr}_{E/K}(x) = \mathrm{Tr}_{F/K}\left(\mathrm{Tr}_{E/F}(x)\right)$.

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión finita. Probar que:

i) E/K es separable si y sólo si $\mathrm{Tr} : E \to K$ es una aplicación no nula.

ii) Si E/K es separable, entonces $\mathrm{Tr} : E \to K$ es suryectiva.

iii) La aplicación $\mathrm{Tr} : E \times E \to K$ definida por $\mathrm{Tr}(a, b) = \mathrm{Tr}(a.b)$ es una forma bilineal simétrica.

iv) Para cada $a \in E$ se define $\mathrm{Tr}_a : E \to K$ como $\mathrm{Tr}_a(b) = \mathrm{Tr}(a.b)$.

  (a) Verificar que $\mathrm{Tr}_a \in E^*$ para cada $a \in E$.

  (b) Probar que si E/K es separable, la aplicación $a \mapsto \mathrm{Tr}_a$ es un isomorfismo entre E y E^*.

Ejercicio 6. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión de grado q, con q un primo distinto de p. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q - 1$ de $f(\alpha, K)$ es nulo.

Ejercicio 7.

i) Calcular núcleo e imagen del morfismo de grupos de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}^*$ inducido por la aplicación $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

ii) Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo finito y sea L/K una extensión finita. Probar que la norma y la traza en L/K son suryectivas.

Ejercicio 9. Sea u trascendente sobre $\mathbb{Z}_7$ y sean $K = \mathbb{Z}_7(u^7 - u)$ y $E = \mathbb{Z}_7(u)$.

i) Hallar una base del núcleo de la transformación lineal $\mathrm{Tr}_{E/K} : E \to K$.

ii) Encontrar una base de E como K-espacio vectorial formada por elementos de traza 1.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado n tal que n es coprimo con p. Sea $x \in E$. Probar que si $\mathrm{Tr}(x^i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $x = 0$.