

ÁLGEBRA III

Práctica 8 – Primer Cuatrimestre de 2003

Ejercicio 1. Sean K un cuerpo, C/K una clausura algebraica de K y $f \in K[X]$ un polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Si $f = (X - a_1) \dots (X - a_n)$ (con $a_i \in C$) se define el discriminante de f en la forma:

$$\Delta(f) = \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2$$

i) Probar que:

a) Si $f = X^2 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = b^2 - 4c$.

b) Si $f = X^3 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = -4b^3 - 27c^2$.

ii) Sea E/\mathbb{Q} una extensión de grado n de \mathbb{Q} . Sea a tal que $E = \mathbb{Q}(a)$ y sea $f = f(a, \mathbb{Q})$. Probar que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{E/\mathbb{Q}}(f'(a))$, donde f' es el polinomio derivado de f .

Ejercicio 2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Determinar la única subextensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.

i) Demostrar que toda extensión cuadrática de \mathbb{Q} está contenida en una extensión ciclotómica.

ii) En cada uno de los siguientes casos, exhibir una extensión ciclotómica E/\mathbb{Q} tal que $F \subseteq E$:

a) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$

c) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$

b) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$

d) F/\mathbb{Q} cuerpo de descomposición de $X^{10} + 3X^8 - X^2 - 3$

Ejercicio 4. Hallar todas las subextensiones de:

i) $\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}$.

ii) E/\mathbb{Q} , donde E es un cuerpo de descomposición de $X^8 - 1$ sobre \mathbb{Q} .

iii) E/\mathbb{Z}_p , donde E es un cuerpo de descomposición de $X^8 - 1$ sobre \mathbb{Z}_p , para cada $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 5. Para cada primo positivo p , caracterizar $G(E, \mathbb{Q}(\xi_p))$, donde E es un cuerpo de descomposición de $X^{10} - X^5 + 1$ sobre $\mathbb{Q}(\xi_p)$.

Ejercicio 6. Sea E/\mathbb{Q} un cuerpo de descomposición de $X^3 + X + 1$. Probar que el polinomio $X^4 - 6X^2 + 40$ es reducible en $E[X]$.

Ejercicio 7. Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo y sea E un cuerpo de descomposición del polinomio $f = X^5 + pX^3 + p$ sobre \mathbb{Q} . Probar que $G(E, \mathbb{Q})$ contiene subgrupos de orden 2 no invariantes.

Ejercicio 8. Sean $E = K(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $F = K(s_1, s_2, s_3, s_4)$, donde $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre K y $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ es el conjunto de polinomios simétricos elementales en t_1, t_2, t_3, t_4 .

- i) Probar que $F(t_1 + t_2)/F$ es una subextensión no normal de E/F y calcular su grado.
- ii) Sean i, j tales que $1 \leq i < j \leq 4$. Probar que $t_i + t_j \in F(t_1 + t_2)$ si y sólo si $i = 1, j = 2$ o $i = 3, j = 4$.
- iii) Caracterizar $G(F(t_1 + t_2)/F)$.

Ejercicio 9. Sea $\{t_1, \dots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre un cuerpo K y sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ el conjunto de los polinomios simétricos elementales en $\{t_1, \dots, t_n\}$.

- i) Caracterizar las subextensiones de grado 2 de $K(t_1, \dots, t_n)/K(s_1, \dots, s_n)$.
- ii) Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Probar que $t_1^{a_1} + t_2^{a_2} + \dots + t_n^{a_n}$ genera $K(t_1, \dots, t_n)/K(s_1, \dots, s_n)$ si y sólo si $a_i \neq a_j \forall i \neq j$.

Ejercicio 10. Probar que:

- i) Todo grupo abeliano es resoluble.
- ii) Todo p -grupo es resoluble.
- iii) D_n es resoluble.
- iv) S_n es resoluble si y sólo si $n \leq 4$.

Ejercicio 11. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son radicales:

- i) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, i + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$
- ii) E/\mathbb{Q} cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$.
- iii) $K(t_1, t_2)/K(s_1, s_2)$, donde K es un cuerpo de característica 0, $\{t_1, t_2\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y $\{s_1, s_2\}$ los polinomios simétricos elementales.

Ejercicio 12. Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ un polinomio de grado n y sea E un cuerpo de descomposición de f sobre K . Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

Ejercicio 13.

- i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Sea $H \subset S_p$ un subgrupo que contiene una transposición y una permutación de orden p . Probar que $H = S_p$.
- ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado p primo, y sea $E \subset \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f . Probar que si f tiene exactamente dos raíces no reales en \mathbb{C} , entonces $G(E/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.

Ejercicio 14.

- i) Sea $m \in \mathbb{N}$ par, y sean $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ enteros positivos pares, con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1) \dots (X - a_r) - 2$. Probar que f tiene exactamente dos raíces no reales en \mathbb{C} y que es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
- ii) Deducir que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión galoisiana E/\mathbb{Q} con grupo de Galois S_p .

Ejercicio 15. Probar que $f = X^5 - 12X^4 + 46X^3 - 72X^2 + 88X - 98 \in \mathbb{Q}[X]$ no es resoluble por radicales.