ÁLGEBRA III

Práctica 4 – Segundo Cuatrimestre de 2003

Elementos primitivos y teorema de Galois

1. Hallar elementos primitivos de $E/\mathbb{Q}$, donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio:

   i) $X^3 - 2$ iii) $X^4 - 2$

   ii) $(X^2 - 3)(X^2 - 2)$ iv) $(X^4 + 1)(X^2 + 5)$

2. Hallar un elemento primitivo de $F_8/\mathbb{Z}_2$ (F_8 denota al cuerpo de 8 elementos).

3. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea $\{ u, v \}$ una familia algebraicamente independiente sobre K. Sean $E = K(u, v)$ y $F = K(u^p, v^p)$. Probar que $[E : F] = p^2$ y que E/F no admite un elemento primitivo. Determinar la clausura separable de F en E.

4. Sea C una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_p$ y sea q un primo distinto de p. Sea L la unión de todos los subcuerpos K de C tales que $[K : \mathbb{Z}_p] = q^i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Probar que $[L : \mathbb{Z}_p] = \infty$ y que toda subextensión propia de $L/\mathbb{Z}_p$ es monógena.

5. Sea $E = \mathbb{C}(X)$. Consideremos los automorfismos r y s de E definidos por $s(X) = X^{-1}$ y $r(X) = wX$, donde w es una raíz n-ésima primitiva de 1. Probar que:

   a) $r^n = s^2 = id_E$ y $rs = sr^{-1}$.

   b) El subgrupo G generado por r y s es isomorfo a D_n.

   c) $E^r = \mathbb{C}(X^n)$.

   d) $E^s = \mathbb{C}(X + X^{-1})$.

   e) $E^G = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

6. Sea K un cuerpo de q elementos y sea $E = K(X)$. Probar que:

   a) $|G(E/K)| = q^3 - q$

   b) $G(E/K)$ está generado por los automorfismos h_a, t_b e i (homotecias, traslaciones e inversión) definidos por

   $$h_a(X) = aX, \quad a \in K - \{0\}; \qquad t_b(X) = X + b, \quad b \in K; \qquad i(X) = X^{-1}.$$

   c) $E^{G(E/K)} = K(Y)$, donde $Y = \dfrac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$.

   d) Calcule E^{G_h} y E^{G_t} donde G_h es el subgrupo generado por las homotecias y G_t el subgrupo generado por las traslaciones.

7. Sean E/K y L/K dos extensiones finitas. Probar que si E/K y L/K son isomorfas entonces $G(E/K) \simeq G(L/K)$. ¿Vale la recíproca?

8. Caracterizar los grupos de Galois de cada uno de los cuerpos de descomposición hallados en el Ejercicio 2 de la Práctica 3.

9. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

   i) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$. ¿Es $E/\mathbb{Q}$ una extensión normal?

   ii) Caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$ y las subextensiones de grado 2 de $E/\mathbb{Q}$.

10. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

11. Determinar todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

12. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y sean $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K. Si $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$, caracterizar $G(K[a, b]/K)$.

13. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.

   i) Sea E/K una extensión galoisiana tal que $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que $E = K[a, b]$ con $a^2,\ b^2\ \in K$.

   ii) Generalizar el resultado del ítem i) para $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos).

14. Encontrar una extensión $E/\mathbb{Q}$ tal que $G(E/\mathbb{Q}) \simeq\ \mathbb{Z}_6$.

15. Sea ξ_n una raíz primitiva n-ésima de la unidad y sea $c_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que c_n es irreducible en $K[X]$. Probar que $K(\xi_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y que $G(K(\xi_n)/K) \simeq \mathcal{U}_n$.

16. *a*) Considere $\mathbb{Q}(\xi_{11})$. Qué grado tiene sobre $\mathbb{Q}$? Que grupos conoce de ese orden?

   b) Considere la aplicación determinada por $\xi \mapsto \xi^2$. Compruebe que determina un elemento del grupo de Galois. Calcule el orden del elemento, y concluya sobre la estructura del grupo de Galois.

   c) Probar que $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$. Observe que $\cos(\frac{2\pi}{11}) = \xi_{11} + \overline{\xi_{11}}$.

   d) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.

17. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Probar que E/K tiene sólo dos subextensiones propias, calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.

18. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es galoisiana.

19. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado $p^n s$ con $n \in \mathbb{N}$ y $(p, s) = 1$. Probar que:

   i) E/K tiene subextensiones de grado s, y dos de ellas son isomorfas.

   ii) Si $p > s$ hay una única subextensión de grado s que, además, resulta galoisiana.

20. i) Dada una extensión galoisiana E/K, probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).

  ii) Determinarla en el caso en que E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

21. i) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K. Probar que E/K y F/K son abelianas (es decir, galoisianas con grupo de Galois abeliano) si y sólo si $E.F/K$ es abeliana.

  ii) Exhibir dos subextensiones de grado finito $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ tales que $E.F/\mathbb{Q}$ sea galoisiana pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo sean.

22. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de f. Probar que $G(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.