ÁLGEBRA III

Práctica 6 – Primer Cuatrimestre de 2004

Derivaciones

1. Sea E un cuerpo de característica p, $D : E \to E$ una derivación, y $F = E(\alpha)$ donde $\alpha^p = a$, $a \in E$ y $\alpha \notin E$. Demuestre que D se extiende a una derivación $\widetilde{D} : F \to F$ si y sólo si $D(a) = 0$. En caso que $D(a) = 0$, el valor de $\widetilde{D}(\alpha)$ puede ser elegido de manera arbitraria.

2. Sea E/K una extensión finita. Demuestre que E/K es separable si y sólo si toda derivación que se anula en k, se anula en E. Sugerencia: considerar una torre $E = E_n/E_{n-1}/E_{n-2}/\dots/E_2/E_1/E_0 = k$ donde $E_{i+1} = E_i(\alpha_i)$, es o bien separable, o bien como en el ejercicio previo. Definir la derivación no nula en el "último"α no separable.

3. Sea k un cuerpo de característica cero. Sea E/k una extensión, y $x_1, \dots, x_n$ en E. Demuestre que $\{x_1, \dots, x_n\}$ son algebraicamente independientes si y sólo si existen $D_1, \dots, D_n$ derivaciones de E en E tales que $D_i(x_j) = \delta_{ij}$.

4. Sea k de característica cero, E/k una extensión, y $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ una base de trascendencia, es decir, $\{x_1, \dots, x_n\}$ son algebraicamente independientes y $E/k(x_1, \dots, x_n)$ es algebraica. Demuestre que $\dim_E(\mathrm{Der}_k(E, E)) = n$ (en particular, redemostramos en este caso que toda base de trascendencia tiene el mismo cardinal). Sugerencia: muestre primero (o recuerde que) si $F = k(x_1, \dots, x_n)$ entonces $\mathrm{Der}_k(F, F) = \oplus_{i=1}^n F\partial_i$. Para cada i, extienda ∂_i a una derivación definida sobre E, llamando D_i a esas derivaciones, muestre que $\mathrm{Der}_k(E, E) = \oplus_{i=1}^n ED_i$.

Varios

1. Sean K un cuerpo, C/K una clausura algebraica de K y $f \in K[X]$ un polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Si $f = (X - a_1)\dots(X - a_n)$ (con $a_i \in C$) se define el discriminante de f en la forma:
$$\Delta(f) = \prod_{i<j}(a_i - a_j)^2$$
   a) Probar que:
      1) Si $f = X^2 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = b^2 - 4c$.
      2) Si $f = X^3 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = -4b^3 - 27c^2$.

   b) Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión de grado n de $\mathbb{Q}$. Sea a tal que $E = \mathbb{Q}(a)$ y sea $f = f(a, \mathbb{Q})$. Probar que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N_{E/\mathbb{Q}}(f'(a))$, donde f' es el polinomio derivado de f.

2. Sea $E = k[t_1, \dots, t_n]$ donde los t_i son algebraicamente independientes y $K = k[s_1, \dots, s_n] = E^{S_n}$. Encontrar un generador "δ" de una subextensión cuadrática de F/K (cuántas subextensiones cuadráticas hay?). Para $n = 2, 3$, hallar explícitamente la ecuación de grado 2, con coeficientes en los s_i, que verifica δ.

3. Se tiene un triángulo equilátero, y se quiere dividir en n-partes iguales a uno de sus ángulos. Si $n = 2, 3, 5, 7$, para cuál de esos valores esta operación se puede hacer con regla y compás?

4. Dado un rectángulo de 5 cms. por 7 cms., probar que se puede construir otro rectángulo, de igual proporción que el anterior, y con área $\sqrt{35}$. (Nota: el rectángulo de lados $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ no tiene las mismas proporciones que uno de lados 5 y 7.)

Resolubilidad por radicales

1. Sea p un número primo y $H \subseteq S_p$ un subgrupo. Demuestre que si H contiene una trasposición y una permutación de orden p, enmtonces $H = S_p$.

2. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado p con p un número primo, y sea E el cuerpo de descomposición de f. Si f tiene exactamente dos raíces complejas no reales, demuestre que $G(E/\mathbb{Q}) = S_p$.

3. Sea p un número primo, y $f = (x^2 + 2)(x - 2)(x - 4) \dots (x - 2(p - 2)) - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Muestre que f no es resoluble por radicales.

4. Mostrar que $x^5 - ax - 1$ no es resoluble por radicales para $a = 3, 4, 5, 7$.

5. Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ un polinomio de grado n y sea E un cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.