Álgebra III

Práctica 2 – Primer Cuatrimestre de 2005

Extensiones de cuerpos, polinomios minimales, elementos algebraicos y trascendentes

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K. Dada una subextensión F/K de E/K, probar que $f(x,F)$ divide a $f(x,K)$. Dar ejemplos con $f(x,F) = f(x,K)$ y con $f(x,F) \neq f(x,K)$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

i) $f\big(\sqrt[4]{2},\, \mathbb{Q}\big)$	ii) $f\,\big(\sqrt[4]{2},\, \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]\big)$	iii) $f\,\big(\sqrt[4]{2},\, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}\,]\big)$
iv) $f\,\big(\sqrt[4]{-1},\, \mathbb{Q}\,\big)$	v) $f\,\big(\sqrt[4]{-1},\, \mathbb{Q}[i]\,\big)$	vi) $f\,(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$

Ejercicio 3. Calcular:

i) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\, i] : \mathbb{Q}\big]$

ii) $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\, \sqrt[5]{7}\,] : \mathbb{Q}\big]$

Ejercicio 4.

i) Calcular $\big[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}\,] : \mathbb{Q}\big]$ y $\big[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}\,] : \mathbb{Q}\big]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}\,] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}\,]$.

ii) Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\,]$. Calcular $f(\alpha, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 5. Probar que $\mathbb{Q}\big[\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\big] = \mathbb{Q}\big[\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\big]$. Calcular $\Big[\mathbb{Q}\big[\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\big] : \mathbb{Q}\Big]$.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A, con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea $K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ con la estructura de cuerpo del Ejercicio 11 de la Práctica 1.

i) Calcular el polinomio minimal de cada uno de los elementos de K sobre su cuerpo primo.

ii) Hallar todos los polinomios $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibles de grado 2 y probar que para cada uno de ellos se tiene que $\mathbb{Z}_3[X]/\langle f\rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 8. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle : K\,]$.

Ejercicio 9. Sea F/K una extensión de cuerpos de grado impar. Probar que si $F = K[u]$ entonces $F = K[u^2]$.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n : 6) = 1$, y sea $F/\mathbb{Q}$ una subextensión de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ de grado n. Probar que $\big[F[\sqrt[3]{2}, i\,] : F\big] = 6$.

Ejercicio 11. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K. Probar que:

i) Si $\mathrm{mcd}([L:K],\, [M:K]) = 1$, entonces $[L.M:K] = [L:K]\ .\ [M:K]$.

ii) Si $[L.M:K] = [L:K]\ .\ [M:K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 12.

i) Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Caracterizar las extensiones cuadráticas (i.e. de grado 2) de K.

ii) Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_2$. Probar que no existe $b \in \mathbb{Z}_2[a]$ tal que $f(b, \mathbb{Z}_2) = X^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 13. Dado $b \in \mathbb{Q}$, sea a_b una raíz del polinomio $X^2 + bX + b^2$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[a_b]$ de $\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}[a_b] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 14.

i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.

ii) Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.

iii) Probar que $f(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

Ejercicio 15. Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$. Deducir que $\mathbb{Q}[\xi_5]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

Ejercicio 16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \notin \mathbb{Q}^p$.

i) Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.

ii) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 17. Se define $\mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\mathbb{Q}_{\text{alg}}/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica que no es finita.

Ejercicio 18. Sea $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.

i) (a) Probar que $\forall\, a \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right]$ con $a \notin \mathbb{Q}$ y $a^2 \in \mathbb{Q}$, existen $b \in \mathbb{Q}$ y enteros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ tales que $a = b\sqrt{p_{i_1}} \cdots \sqrt{p_{i_k}}$.

(b) Calcular $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right] : \mathbb{Q}\right]$.

(c) Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\right]/\mathbb{Q}$.

ii) Hallar $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_i}\right]_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{Q}\right]$.

iii) ¿Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_i}\right]_{i\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$?

iv) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Deducir $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 19. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 20.

i) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

ii) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.

iii) Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a.

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo.

i) Sea t trascendente sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f\,(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.

ii) Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K\,(t_1, \ldots, t_n\,) : K\,(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n}\,)\,]$.

Ejercicio 22. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \mathrm{gr}(f)$.

Ejercicio 23. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o $x.\,y$ es trascendente sobre K.

ii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.

iii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x.\,y$ es trascendente sobre K.

iv) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

v) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{\,x, y\,\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

Ejercicio 24.

i) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]\,\big) \subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$ (de hecho, vale la igualdad).

ii) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.

   (a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ pero, en general, $f\big(\,\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]\,\big) \not\subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]$.

   (b) Considerar $\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d},\, \xi_3\big]$. ¿Qué sucede en este caso?