

ÁLGEBRA III

Práctica 3 – Primer Cuatrimestre de 2005

Cuerpos de descomposición, extensiones normales y grupo de Galois

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
- ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
- iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
- iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

- i) $X^p - a$, sobre \mathbb{Q} , con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$.
- ii) $X^3 - 10$, sobre \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.
- iii) $X^4 - 5$, sobre \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.
- iv) $X^4 + 2$, sobre \mathbb{Q} y $\mathbb{Q}[i]$.
- v) $\prod_{i=1}^n (X^2 - p_i)$, sobre \mathbb{Q} , con $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
- vi) $X^3 - 2$, sobre \mathbb{Z}_7 .
- vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ y sobre \mathbb{Z}_5 .
- viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre \mathbb{C} y $n \in \mathbb{N}$.
- ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre \mathbb{R} .

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + 2X + 1$ y $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre \mathbb{Z}_3 . Probar que son isomorfos como extensiones de \mathbb{Z}_3 .

Ejercicio 4. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre \mathbb{Z}_5 . ¿Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión separable que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ y sea $n = \text{gr}(f)$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad, y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Toda extensión de grado finito es normal.
- ii) Toda extensión de grado finito tiene una clausura normal de grado finito.
- iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.
- iv) Todo K -morfismo $f : L/K \rightarrow L/K$ es un K -automorfismo.
- v) Si L/K es una extensión algebraica, todo K -morfismo $f : L/K \rightarrow L/K$ es un K -automorfismo.
- vi) Toda extensión con grupo de Galois trivial es normal.
- vii) Todo grupo de Galois es abeliano.
- viii) El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.

Ejercicio 7. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$.

- i) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f : K \rightarrow K$ definido por $f(x) = x^{p^n}$ es un \mathbb{Z}_p -morfismo de cuerpos.
- ii) Probar que si K es un cuerpo finito de característica p , entonces el morfismo f definido en i) es un automorfismo. Dar ejemplos de K infinito con esta propiedad.

Ejercicio 8. Sea K el cuerpo de descomposición de $X^{p^n} - X$ sobre \mathbb{Z}_p . Probar que $[K : \mathbb{Z}_p] = n$.

Ejercicio 9. Caracterizar $G(L/\mathbb{Z}_2)$ para L tal que $[L : \mathbb{Z}_2] = 2, 3$.

Ejercicio 10. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_3 y \mathbb{Z}_7 .

Ejercicio 11. Sea E/K un cuerpo de descomposición de $f \in K[X]$, $f \neq 0$, y sea F/K una subextensión de E/K . Probar que todo morfismo de F/K en E/K puede ser extendido a un automorfismo de E/K .

Ejercicio 12. Determinar cuáles de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso calcular $G(E/K)$ y $\text{Hom}(E/K, C/K)$, donde C es una clausura algebraica de K .

- i) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]/\mathbb{Q}$
- ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$
- iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$
- iv) $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo
- v) $\mathbb{Z}_3[a]/\mathbb{Z}_3$, con a raíz de $X^3 + X^2 + 2X + 1$

Ejercicio 13. Probar que $G(K(X)/K) \simeq \text{PGL}(2, K)$, donde $\text{PGL}(2, K)$ denota el grupo lineal proyectivo ($\text{PGL}(2, K) \simeq \text{GL}(2, K)/(a \cdot \text{Id})$ con $a \neq 0$).

Ejercicio 14. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K . Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 15.

- i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es. Calcular $G(\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q})$.
- ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 16. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K . Probar que $E \cdot F/K$ y $E \cap F/K$ son normales.

Ejercicio 17. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que toda extensión de grado n sobre \mathbb{Q} es normal?

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Sea $K = \mathbb{Z}_p(u, v)$, donde $\{u, v\}$ es una familia algebraicamente independiente sobre \mathbb{Z}_p y sea α una raíz de $f = X^{2p} - uvX^p + v$ en una clausura algebraica C/K de K .

- i) Probar que $K(\alpha)/K$ no es normal.
- ii) Sea E/K un cuerpo de descomposición de f . Hallar $[E : K]$.

Ejercicio 19.

- i) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.
- ii) Sea K un cuerpo infinito y sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene una raíz en E . Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 20. Sea E/K una extensión de K y sea $G = G(E/K)$.

- i) Sea H un subgrupo de G . Probar que ${}^H E = \{t \in E / f(t) = t \forall f \in H\}$ es una subextensión de E/K .
- ii) Sea F/K una subextensión de E/K . Probar que $G_F = \{f \in G / f(t) = t \forall t \in F\}$ es un subgrupo de G .
- iii) De acuerdo a i) y ii), podemos definir aplicaciones entre subextensiones de E/K y subgrupos de $G(E/K)$. Construir explícitamente dichas aplicaciones para la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$. Notar que son biyectivas y que una es la inversa de la otra. ¿Qué relación guardan $(G : H)$ y $[{}^H E : K]$ en este caso?
- iv) ¿Qué pasa en el caso de la extensión $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$?