Álgebra III

Práctica 6 – Primer Cuatrimestre de 2005

Localización, propiedades locales y extensiones de anillos[1]

Ejercicio 1. Sea A un anillo y sea $x \in A$ un elemento nilpotente.

i) Probar que $1 + x \in \mathcal{U}(A)$.

ii) Deducir que si $u \in \mathcal{U}(A)$ y $x \in A$ es nilpotente, entonces $u + x \in \mathcal{U}(A)$.

Ejercicio 2. Sea A un anillo y sea $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$. Probar que:

i) $f \in \mathcal{U}(A[X])$ si y sólo si $a_0 \in \mathcal{U}(A)$ y a_i es nilpotente $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

ii) f es nilpotente si y sólo si a_i es nilpotente $\forall\, 0 \leq i \leq n$.

iii) f es divisor de cero en $A[X]$ si y sólo si existe $a \in A - \{0\}$ tal que $a \cdot f = 0$.

Ejercicio 3. Sea A un anillo. Probar que el radical de Jacobson del anillo $A[X]$ es igual a su nilradical.

Ejercicio 4.

i) Sea $\mathcal{O}$ un anillo local, y sea $e \in \mathcal{O}$ tal que $e^2 = e$ (un elemento e que satisface esta igualdad se llama un *idempotente* del anillo). Probar que $e = 0$ o $e = 1$.

ii) Dar un ejemplo de un anillo con exactamente 2 ideales maximales que posea idempotentes no triviales.

Ejercicio 5. Sea A un anillo y sea $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado tal que $0 \notin S$. Sea $\Sigma = \{\mathcal{I} \subset A \,/\, \mathcal{I} \text{ ideal}, \mathcal{I} \cap S = \emptyset\}$.

i) Probar que Σ tiene elementos maximales con respecto a la inclusión.

ii) Sea $\mathcal{I} \in \Sigma$ maximal con respecto a la inclusión. Probar que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A.

Ejercicio 6. Sean M un A-módulo finitamente generado, N un submódulo de M e $\mathcal{I}$ un ideal de A contenido en el radical de Jacobson de A. Probar que si $M = N + \mathcal{I}\,M$, entonces $N = M$.

Ejercicio 7. Sean A un anillo, M un A-módulo finitamente generado y $\Phi : M \to M$ un morfismo. Probar que si Φ es un epimorfismo, entonces Φ es un isomorfismo.

(Sugerencia: M tiene una estructura de $A[X]$-módulo definida por $X \cdot m = \Phi(m)$.)

[1] *Nota:* En esta práctica la palabra anillo significará anillo conmutativo con identidad $1 \neq 0$.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{O}$ un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{M}$, y sea M un $\mathcal{O}$-módulo finitamente generado.

i) Sean $x_1, \dots, x_n \in M$ tales que $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ es un sistema de generadores de $M/\mathfrak{M}M$ como $\mathcal{O}/\mathfrak{M}$-espacio vectorial. Probar que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un sistema de generadores de M.

ii) Deducir que dos sistemas de generadores minimales de M tienen la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 9. Sea A un subanillo de un anillo B tal que B es entero sobre A, y sea $f : A \to \mathbb{K}$ un homomorfismo de A en un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$. Probar que f se puede extender a un homomorfismo de B en $\mathbb{K}$.

Ejercicio 10. Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos. Sea $\mathfrak{N}$ un ideal maximal de B y sea $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap A$ el ideal maximal correspondiente de A. ¿Es $B_{\mathfrak{N}}$ necesariamente entero sobre $A_{\mathfrak{M}}$?

Ejercicio 11. Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos. Probar que:

i) Si $x \in A$ es una unidad en B, entonces es una unidad en A.

ii) El radical de Jacobson de A es la contracción del radical de Jacobson de B.

Ejercicio 12. Sea A un subanillo de un anillo B, tal que $B - A$ es cerrado por multiplicación. Probar que A es íntegramente cerrado en B.

Ejercicio 13. Probar que todo dominio de factorización única es íntegramente cerrado.

Ejercicio 14. Sea k un cuerpo y sean x, y indeterminadas sobre k.

i) Probar que $k[x, y]/(xy - 1)$ es íntegramente cerrado.

ii) Verificar que $k[x, y]/(x^2 - y^3)$ no es íntegramente cerrado.

Ejercicio 15. Sea A un subanillo de un dominio íntegro B, y sea C la clausura entera de A en B. Sean $f, g \in B[X]$ polinomios mónicos tales que el producto $fg \in C[X]$. Probar que f y g están en $C[X]$.

Ejercicio 16. Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos. Sean $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{P}_n$ una cadena de ideales primos de A, y $\mathcal{Q}_1 \subsetneq \mathcal{Q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{Q}_m$ $(m < n)$ una cadena de ideales primos de B, tales que $\mathcal{Q}_i \cap A = \mathcal{P}_i \; \forall\, 1 \leq i \leq m$. Probar que existen ideales primos $\mathcal{Q}_{m+1}, \dots, \mathcal{Q}_n \subseteq B$ tales que $\mathcal{Q}_m \subsetneq \mathcal{Q}_{m+1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{Q}_n$ y $\mathcal{Q}_i \cap A = \mathcal{P}_i \; \forall\, m+1 \leq i \leq n$.