Clausura Perfecta

Recordemos el siguiente hecho visto en la teórica:

Sea E/K una extensión *normal*, entonces exsiste una subextensión $F \subseteq E$ tal que F/K es puramente inseparable y E/F separable. Más precisamente, si $ch(K) = p > 0$ resulta $F = E^{Gal(E/K)} = K^{p^{-\infty}} \cap E$ (la clausura perfecta de E/K) y si $ch(K) = 0$, $F = E^{Gal(E/K)} = K$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dash, "sep."'] \\ F \arrow[d, dash, "p.i."'] \\ K \end{tikzcd}$$

Como primera aplicación tenemos el siguiente resultado (que también puede ser demostrado usando el Teorema Fundamental de los Polinomios Simétricos Elementales).

Prop: Sea E/K una extensión algebraica y $P \in E[X_1, X_2, \dots, X_n]$ un polinomio no nulo en varias variables. Entonces existe $Q \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ múltiplo de P.

Dem: Consideramos F/K la subextensión de E generada por los coeficientes de P, y N/K su clausura normal. Como los coeficientes de P son algebraicos sobre K resulta que F/K es finita y, por ende, también lo será N/K. Sea $G = Gal(N/K) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ y consideramos

$$R = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i(P) \in N[X_1, X_2, \dots, X_n] \setminus \{0\}$$

donde entendemos que $\phi(P)$ es el polinomio que se obtiene de P, al aplicarle ϕ a sus coeficientes. Es claro que $R \in N^G[X_1, X_2, \dots, X_n] \setminus \{0\}$.

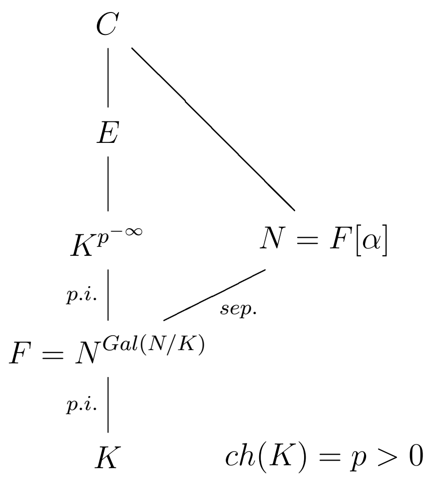
Si $ch(K) = 0$ resulta que $N^G = K$ y tomamos $P = R$.

Si $ch(K) = p > 0$ resulta que $N^G = K^{p^{-\infty}} \cap N$. Sean $r_1, r_2, \dots, r_l \in N^G$ los coeficientes de R. Como son todos puramente inseparables sobre K, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $r_i^{p^k} \in K \ \forall\, i = 1, \dots, l$. Tomando $Q = R^{p^k} \in K[X_1, X_2, \dots, X_n] \setminus \{0\}$, pues elevar a la p distribuye.$\square$

También tenemos el siguiente resultado:

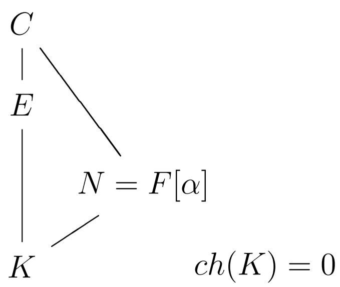
Sea E/K una extensin *algebraica* tal que todo polinomio no constante $P \in K[X]$ admite al menos una raiz en E. Entonces E es una calusura algebraica de K.

Dem: Sea C una clausura algebraica de E, y sea $P \in K[X] \setminus K$. Consideramos $N \subseteq C$ el cuerpo de descomposición de P sobre K. Veamos que $N \subseteq E$. Como N/K es normal, tomando $F = N^{Gal(N/K)}$ resulta que N/F es separable y finita, entonces es simple, es decir, $\exists\, \alpha \in N : N = F[\alpha]$.



Observemos que $F = N^{Gal(N/K)} = K$ si $ch(K) = 0$ y si $ch(K) = p > 0$, $F = N^{Gal(N/K)} = K^{p^{-\infty}} \cap N$, y que en ambos casos $F \subseteq E$, pues cuando $ch(K) = p > 0$ tenemos que $K^{p^{-\infty}} \subseteq E$ por la hipótesis.

Sea $R = irr(\alpha, F)$, notemos que si $\beta \in C$ es otra raiz de R entonces $N = F[\beta]$, pues N/F es normal.



Al igual que en el lema anterior, si $ch(K) = 0$ tomaremos $Q = R$, y si $ch(K) = p > 0$ tomaremos $Q = R^{p^k}$ con k suficientemente grande para tener $Q \in K[X]$.

En cualquier caso Q debe tener al menos una raiz $\beta \in E$. Entonces $N = F[\beta] \subseteq E$. $\square$