Ecuación de grado 3

Problema: Si queremos resolver una ecuación de segundo grado :

$$aX^2 + bX + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

sabemos que tenemos las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que nos dan las raíces. Además sabemos que esas cuentas tienen sentido en los reales si y sólo si la ecuación tiene ambas raíces reales, es decir:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Si quisiésemos resolver

$$X^3 + pX + q = 0$$

tenemos la fórmula

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

donde ambas raíces cúbicas deben tomarse de manera tal que el producto de $\frac{-p}{3}$. Pero estas cuentas podrían irse de los reales, aún cuando todas las raíces de la ecuación lo sean, por ejemplo, la ecuación

$$X^3 - 7X + 6 = 0$$

tiene por raíces a $\{1, 2, -3\} \subset \mathbb{R}$, sin embargo la fórmula nos daría

$$\sqrt[3]{\frac{-6}{2} + \sqrt{\frac{6^2}{4} - \frac{7^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-6}{2} - \sqrt{\frac{6^2}{4} - \frac{7^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}}$$

lo que implicaría sacar raíces cuadradas de números negativos, a pesar de tener todas las raíces reales.

Durante un tiempo se buscó alguna resolvente de la cúbica que no tuviese este inconveniente, es decir, que en los casos en los que las tres reaíces sean reales uno no necesite "escaparse" de $\mathbb{R}$.

A continuación veremos que esto no es posible en el caso en que el polinomio sea irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

Recordemos que si $P \in K[X]$ (K un cuerpo) mónico de grado tres, entonces el discriminante $\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 \in K$ donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de P en alguna clausura algebraica de K.

Proposición: Sea $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ entonces el discriminante es $\Delta = -4p^3 - 27q^2$. Además

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff \text{todas las raíces son reales y distintas.} \\ \Delta = 0 &\iff \text{tiene raíces múltiples.} \end{aligned}$$

Demostración: Sean x_1, x_2 y x_3 las tres raíces complejas de P. Si fuesen todas reales y distintas, $\Delta = ((x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1))^2$ sería positivo por ser un cuadrado.

Supongamos ahora que $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 = a + bi$, $x_3 = a - bi \quad a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 \\ &= (x_1 - (a + bi))^2(a + bi - (a - bi))^2((a - bi) - x_1)^2 \\ &= (x_1 - a - bi)^2(2bi)^2(a - bi - x_1)^2 \\ &= \big((x_1 - a - bi)(a - bi - x_1)\big)^2(2bi)^2 \\ &= \big((x_1 - a - bi)(x_1 - a + bi)\big)^2(2bi)^2 \\ &= \big((x_1 - a - bi)\overline{(x_1 - a - bi)}\big)^2(2bi)^2 \\ &= |x_1 - a - bi|^4(2bi)^2 \\ &= -|x_1 - a - bi|^4 4b^2 \\ &= -|(x_1 - a)^2 + b^2|^2 4b^2 < 0 \end{aligned}$$

las demás afirmaciones están en la práctica. $\square$

Proposición: $X^p - a \in K[X]$ (con p primo) es irreducible en $K[X]$ si y sólo si no tiene raíces en K.

Demostración: Supongamos que no es irreducible, es decir:

$$X^p - a = (X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0)(X^m + c_{m-1}X^{m-1} + \cdots + c_0)$$

donde $n + m = p$. Entonces m y n son coprimos por lo que existen enteros r y s tales que $rn + sm = 1$. Pero $-b_0^r c_0^s \in K$ es una raíz de $X^p - a$, pues

$(-1)^n b_0$ es el producto de n raíces y $(-1)^m c_0$ de m, entonces:

$$\begin{aligned}
(-b_0^r c_0^s)^p &= (-1)^{prn+psm}(b_0^p)^r(c_0^p)^s = ((-1)^{pn}b_0^p)^r((-1)^{pm}c_0^p)^s \\
(-b_0^r c_0^s)^p &= (a^n)^r(a^m)^s = a^{nr+ms} = a \quad \square
\end{aligned}$$

Proposición: Sea $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible, si $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ verifica $\sqrt{\Delta} \in K$ y $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ son las raíces, entonces:

$$x_1 \in K \Longrightarrow x_2, x_3 \in K$$

Demostración: Está claro que $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$ pues el polinomio es irreducible. Como

$$\frac{X^3 + pX + q}{X - x_1} = X^2 - aX + b = (X - x_2)(X - x_3)$$

con $a = x_2 + x_3 \in K$ y $b = x_2 x_3 \in K$, se tiene que $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \in K$. Pero como $\sqrt{\Delta} \in K$ resulta que $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \in K$, de donde $(x_2 - x_3) \in K$. Como $a = x_2 + x_3 \in K$ resulta que $x_2, x_3 \in K$.$\square$

Proposición: Sea $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}$ irreducible tal que sus tres raíces $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Entonces no existe resolución real (por radicales).

Ejemplo: El polinomio $P(X) = X^3 - 3X - 1$ verifica las hipótesis del problema, puesto que tiene grado 3 y no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ ($P(n)$ es impar para cualquier $n \in \mathbb{Z}$) luego es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, y tiene todas sus raíces reales, ya que $\Delta = -(4(-3)^3 + 27(-1)^2) = 81 > 0$. Otra forma sería observando que P es el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz simétrica.

Demostración: Supongamos que tenemos la resolución por radicales

$$\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \cdots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}$$

tal que $x_1, x_2, x_3 \in K_n$ y $K_i = K_{i-1}[\sqrt[p_i]{a_i}]$ con $a_i \in K_{i-1}$ y p_i primo. Como las raíces son reales, tenemos que $\Delta > 0$ y $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ entonces tenemos la cadena:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}] \subseteq K_1[\sqrt{\Delta}] \subseteq K_2[\sqrt{\Delta}] \cdots \subseteq K_n[\sqrt{\Delta}] \subseteq \mathbb{R}$$

simplificando:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}] = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \cdots \subsetneq E_m \subsetneq \mathbb{R}$$

con $m \leq n$ y $E_i = E_{i-1}[\sqrt[q_i]{b_i}]$, $b_i \in E_{i-1}$, q_i primo.

Sea $l \in \mathbb{N}$ el mínimo tal que E_l contiene alguna de las raíces de P. Supongamos entonces que $x_1 \in E_l \setminus E_{l-1}$. Como $E_l = E_{l-1}[\sqrt[q_l]{b_l}]$ entonces $(E_l : E_{l-1}) = q_l$. Como $\sqrt{\Delta} \in E_l$ resulta que las otras raíces de P también están en $E_l \setminus E_{l-1}$. Entonces P es irreducible sobre E_{l-1} , E_l es el cuerpo de descomposición de P sobre E_{l-1} y $q_l = 3$.

Pero en este caso resulta que E_l/E_{l-1} es una extensión normal, y como tiene una raíz cúbica de b_l entonces debe contener a las demás, lo que implica que $\xi_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in E_l$ que se contradice con el hecho de que $E_l \subsetneq \mathbb{R}$.$\square$