Algebra III

Primer parcial - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{3+\sqrt{3}}]$ y sea $N/\mathbb{Q}$ la clausura normal de $E/\mathbb{Q}$.

1. Probar que $\sqrt{2} \in N$ y que $[N : \mathbb{Q}] = 8$.
2. Determinar $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$.
3. Calcular todas las subextensiones de $N/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Dato útil: Puede utilizar sin demostrar que $\sqrt{2} \notin E$. Si se quiere convencer, use que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es DFU.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo y sea α algebraico sobre K de grado n. Probar que $K[\alpha]/K$ tiene a lo sumo 2^{n-1} subextensiones.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo de característica cero y sea E/K una extensión normal de grado n. Sea $p \in \mathbb{N}$ el menor primo tal que $p \mid n$. Probar que si F/K es una subextensión de grado p, entonces es normal.

Ejercicio 4. Sea K un cuerpo de característica cero, sea α algebraico sobre K y sea $\beta \in K[\alpha]$. Supongamos que $\mathrm{irr}(\alpha, K[\beta]) = X^n + a_{n-1}(\beta)X^{n-1} + \cdots + a_0(\beta) \in K[\beta][X]$. Probar que:

$$\mathrm{irr}(\alpha, K) = \pm \mathrm{Res}_Y(X^n + a_{n-1}(Y)X^{n-1} + \cdots + a_0(Y), \mathrm{irr}(\beta, K)(Y)).$$

Ejercicio 5. Sea $f = X^5 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \simeq D_5$ si y solo si:

1. f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$,
2. el discriminante $\Delta(f)$ es un cuadrado en $\mathbb{Q}$, y
3. la ecuación $f(X) = 0$ es resoluble por radicales.