# Algebra III

**Primer parcial (Versión para David) - Primer cuatrimestre de 2006**

**Ejercicio 1.** Sea $f = X^6 - 5$ y sea $E$ el cuerpo de descomposición de $f$ sobre $\mathbb{Q}$.

1. Probar que $\xi_3 \in E$ y que $E/\mathbb{Q}[\xi_3]$ es normal.
2. Calcular $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}[\xi_3])$ y las subextensiones de $E/\mathbb{Q}[\xi_3]$.
3. ¿Qué pasa con $g = X^6 + 3$?

**Ejercicio 2.** Sea $K$ un cuerpo de característica cero y sean $E/K$ y $L/K$ dos extensiones finitas.

1. ¿Es cierto que si $[E : K]$ y $[L : K]$ son potencias de 2, entonces $[EL : K]$ también es una potencia de 2?
2. ¿Qué pasa si $L/K$ es normal?

**Ejercicio 3.** Sea $K$ un cuerpo de característica cero y sea $E/K$ una extensión normal de grado 45. Probar que toda subextensión de $E/K$ es normal.

**Ejercicio 4.** Sea $K$ un cuerpo de característica cero y sean $\alpha$ y $\beta$ algebraicos sobre $K$. Sean $a$, $b$ y $c$ los grados de $\alpha$, $\beta$ y $\alpha+\beta$ sobre $K$ respectivamente. Probar que si $\mathrm{irr}(\alpha, K)$ y $\mathrm{irr}(\beta, K)$ no tienen el término $X^{a-1}$ y $X^{b-1}$ respectivamente, entonces $\mathrm{irr}(\alpha + \beta, K)$ no tiene el término $X^{c-1}$.

**Ejercicio 5.** Sea $K$ un cuerpo de característica cero y sea $f \in K[X]$ con $\deg(f) = 6$. Sea $E$ el cuerpo de descomposición de $f$ sobre $K$. Probar que si $[E : K] = 16$, entonces:

1. $\mathrm{Gal}(E/K) \simeq D_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.
2. Existen $g, h \in K[X]$ irreducibles, tales que $\deg(g) = 4$, $\deg(h) = 2$ y $f = gh$.
3. $E = FL$ y $F \cap L = K$, donde $F$ y $L$ son los cuerpos de descomposición de $g$ y $h$ respectivamente. ¿Es cierto que toda subextensión de $E/K$ es el compuesto de una subextensión de $F/K$ con una de $L/K$?