Algebra III

Segundo parcial - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo de característica cero y sea $E = K(t)$ con t trascendente sobre K. Sean $L_1 = K(t^2)$ y $L_2 = K(t^2 + t)$.

1. Determinar $\mathrm{Aut}(E/L_1)$ y $\mathrm{Aut}(E/L_2)$.
2. Probar que $[E : L_1 \cap L_2] = \infty$.
3. Probar que $L_1 \cap L_2 = K$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea $K[\alpha]/K$ una extensión puramente inseparable de grado p^e. Probar que las únicas subextensiones son

$$K_n = \left\{ x \in K[\alpha] \,:\, x^{p^n} \in K \right\} \quad \text{con } 0 \leqslant n \leqslant e.$$

Ejercicio 3. Sea $f = x^{q^n} - ax - b \in \mathbb{F}_q[X]$ con $q^n > 2$ y supongamos que $g = x^{q^n-1} - a \in \mathbb{F}_q[X]$ es irreducible. Probar que f se factoriza en $\mathbb{F}_q[X]$ como producto de dos polinomios irreducibles de grados 1 y $q^n - 1$ respectivamente.

Sugerencia: Probar que si $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q} - \mathbb{F}_q$ es raíz de f, entonces $\alpha^q - \alpha$ es raíz de g.

Ejercicio 4. Sea $f = 3(x^2+1)(x^3+x+1)+7(x+1)(x^4+x-1) \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{S}_5$.

Ejercicio 5. ¿Existe un número algebraico α de grado 3 sobre $\mathbb{Q}$ que verifique simultaneamente $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha) = 2$, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha^2) = -6$ y $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha^3) = -10$?