Algebra III

Práctica 3 - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Todo polinomio no constante de factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
2. El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
3. Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
4. Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

1. $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.
2. $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
3. $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.
4. $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.
5. $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
6. $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{Z}_7$.
7. $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Z}_5$.
8. $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.
9. $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. (Fácil, pero muy útil) Sea $E = K[a]/K$ una extensión normal y simple. Sea $b \in \overline{K}$ una raíz de $\mathrm{irr}(a, K)$. Probar que $b \in E$ y que $E = K[b]$.

Ejercicio 4. Sea E el cuerpo de descomposición de un $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. Toda extensión finita es normal.
2. Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.
3. Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.
4. Todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.
5. Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.
6. Toda extensión con grupo de Galois trivial es normal.
7. El grupo de Galois de una extensión normal es cíclico.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Probar que todo K-morfismo de F en E puede ser extendido a un K-automorfismo de E.

Ejercicio 7. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 9. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $E \cap F/K$ son normales.

Ejercicio 10. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 11. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_7$.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante $f \in K[X]$ tiene una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.