Algebra III

Práctica 4 - Primer cuatrimestre de 2006

En toda esta práctica, K será un cuerpo de característica cero.

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión finita. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$ tiene $[E : K]$ elementos.
2. Si $a \in E$ verifica que los $\sigma(a)$ con $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$ son todos distintos, entonces $E = K[a]$.
3. Si $b \in E$, entonces
$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E,\overline{K})} (X - \sigma(b)) = \mathrm{irr}(b, K)^{[E:K[b]]}.$$
4. Existe $\theta \in E$ tal que $E = K[\theta]$.

Ejercicio 2. (Lema de Carlos) Sean $f, g, h \in K[X]$ con f irreducible y $h(X) \mid f(g(X))$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{K}$ las raices de f y sean $\beta_1, \dots, \beta_m \in \overline{K}$ las raices de h. Probar que los conjuntos $A_j = \{1 \leqslant i \leqslant m \ : \ g(\beta_i) = \alpha_j\}$ tienen todos la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 3. Hallar elementos primitivos de $E/\mathbb{Q}$, donde E es el cuerpo de descomposición del polinomio:

1.	$X^3 - 2$	2.	$(X^2 - 2)(X^2 - 3)$
3.	$X^4 - 2$	4.	$(X^4 + 1)(X^2 + 5)$

Ejercicio 4. Caracterizar los grupos de Galois de cada uno de los cuerpos de descomposición hallados en el ejercicio 2 de la práctica 3.

Ejercicio 5. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$. Probar que $E/\mathbb{Q}$ es normal, calcular su grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y determinar todas sus subextensiones.

Ejercicio 6. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. Determinar todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 8. Sea $\Phi_n = \mathrm{irr}(\xi_n, \mathbb{Q})$ el n-ésimo polinomio ciclotómico. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que Φ_n es irredubible en $K[X]$. Probar que $K[\xi_n]/K$ es normal de grado $\varphi(n)$ y que $\mathrm{Gal}(K[\xi_n]/K) \cong \mathcal{U}_n$.

Ejercicio 9. Sean a y b algebraicos sobre K tales que $a^2, b^2 \in K$ y $a, b, ab \notin K$. Caracterizar $\mathrm{Gal}(K[a, b]/K)$.

Ejercicio 10. Sea E/K una extensión normal tal que $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos). Probar que existen $a_1, \dots, a_n \in E$ tales que $E = K[a_1, \dots, a_n]$ y $a_i^2 \in K \ \forall\, i$.

Ejercicio 11. Consideremos la extensión $E = \mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$.

1. Probar que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$ es la única subextensión de grado 5.
2. Probar que hay una única subextensión de grado 2. Determinarla.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión normal de grado 15. Probar que E/K tiene solo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.

Ejercicio 13. Sea E/K una extensión normal de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es normal.

Ejercicio 14. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión normal de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Probar que:

1. E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.
2. Si $p > s$ entonces hay una única subextensión de grado s, que además, resulta ser normal.

Ejercicio 15. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible con exactamente una raíz real y $\mathrm{gr}(f) \geqslant 2$. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $\mathrm{Gal}(E/K)$ no es abeliano.

Ejercicio 16. Sea L/K una extensión y sean E/K y F/K dos subextensiones algebraicas. Probar que EF/K es abeliana si y solo si E/K y F/K son abelianas.

Ejercicio 17. Sea E/K una extensión algebraica. Probar que existe una subextensión L/K abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que E es el cuerpo de descomposición de $X^4 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 18. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ y sean $f, g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{C})$ dados por $f(X) = X^{-1}$ y $g(X) = \xi_n X$, donde $\xi_n \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

1. $f^2 = g^n = \mathrm{id}_E$ y $fg = g^{-1} f$.
2. El subgrupo H generado por f y g es isomorfo a D_n.
3. $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.