Algebra III
Práctica 5 - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Probar que:

1. Todo grupo abeliano es resoluble.
2. Todo p-grupo es resoluble.
3. D_n es resoluble.
4. $\mathbb{S}_n$ es resoluble si y solo si $n \leqslant 4$.

Ejercicio 2. Mostrar explicitamente que las siguientes extensiones son resolubles por radicales:

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i+\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$
2. $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$
3. $N/\mathbb{C}(a, b)$ cuerpo de descomposición de $f = X^2 + aX + b$
4. $N/\mathbb{C}(a, b, c)$ cuerpo de descomposición de $f = X^3 + aX^2 + bX + c$
5. $N/\mathbb{C}(a, b, c, d)$ cuerpo de descomposición de $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

Ejercicio 3. Probar que ninguno de los siguientes polinomios es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

1. $X^5 - 14X + 7$
2. $X^5 - 7X^2 + 7$
3. $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$

Ejercicio 4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado primo $\geqslant 5$. Suponer que f tiene exactamente dos raices no reales. Probar que f no es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 5. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ irreducible de grado primo $p \geqslant 5$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ las raices de f y sea $N = K[\alpha_1, \dots, \alpha_p]$ el cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que f es resoluble por radicales sobre K si y solo si $N = K[\alpha_i, \alpha_j]$ para todos $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

Ejercicio 6.

1. Sea $m \in \mathbb{N}$ par y sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ enteros positivos pares con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2 + m)(X - a_1)\cdots(X - a_r) - 2$. Probar que:
   (a) f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Para m suficientemente grande, f tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$.
   (c) (Difícil) Probar que el item anterior sigue valiendo si se quita la hipótesis "m suficientemente grande".
2. Deducir que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión normal $E/\mathbb{Q}$ con grupo de Galois isomorfo a $\mathbb{S}_p$.