Algebra III

Práctica 7 - Primer cuatrimestre de 2006

En esta práctica t, u y v son variables.

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo de característica $p > 2$ y sea $f = X^{2p} + uvX^p + v \in K(u,v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{K(u,v)}$ una raíz de f. Probar que:

1. $[K(u,v)[\alpha] : K(u,v)] = 2p$.
2. $K(u,v)[\alpha]/K(u,v)$ no es separable ni puramente inseparable.

¿Qué pasa para característica $p = 2$?

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $\mathrm{irr}(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \ : \ \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E \ : \ x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E \ : \ x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

1. E_s y E_i son subcuerpos de E.
2. E es puramente inseparable sobre E_s.
3. $E_s \cap E_i = K$.
4. Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

1. $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.
2. $\mathbb{F}_p(u,v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 5. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $x^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m con $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 6. Sea K un cuerpo de característica p. Dentro de una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$. Probar que:

1. Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.
2. Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ejercicio 7. Un cuerpo K de característica p se dice perfecto si $K^{p^{-\infty}} = K$.

1. Probar que todo cuerpo de característica cero es perfecto.
2. Si K es de característica $p > 0$, entonces es perfecto si y solo si el morfismo $\sigma : K \to K$ dado por $\sigma(x) = x^p$ es un automorfismo.
3. Probar que todo cuerpo finito es perfecto.

4. Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo de característica p. Probar que:

1. $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $\overline{K}/K^{p^{-\infty}}$ es separable.
2. K es perfecto si y solo si toda extensión algebraica de K es separable.

Ejercicio 9. Probar que si K es un cuerpo de característica $p > 0$, entonces $K(t)$ no es perfecto.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

1. Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.
2. Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.
3. Probar que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.