Algebra III

Práctica 8 - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1.

1. Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.
2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular la norma y la traza de ξ_p en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$.
3. Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados y sea $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]-\mathbb{Q}$. Probar que $\operatorname{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = X^2-\operatorname{Tr}(\alpha)X+\operatorname{N}(\alpha)$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea t una variable. Calcular la norma y la traza en $K(t)/K(t^p)$.

Ejercicio 3. Sea $p > 3$ un primo. Sean $E = \mathbb{F}_p(u, v)$ y $K = \mathbb{F}_p(u^3, v^2)$, donde u y v son variables. Calcular la norma y la traza de $u + v$ en E/K.

Ejercicio 4. Sea E/K una extensión finita. Probar que:

1. E/K es separable si y solo si $\operatorname{Tr} : E \to K$ es no nula.
2. Si E/K es separable, entonces $\operatorname{Tr} : E \to K$ es suryectiva.
3. La aplicación $\operatorname{Tr} : E \times E \to K$ dada por $\operatorname{Tr}(a, b) = \operatorname{Tr}(ab)$ es una forma bilineal simétrica.
4. Para cada $a \in E$ se define $\operatorname{Tr}_a : E \to K$ mediante $\operatorname{Tr}_a(b) = \operatorname{Tr}(ab)$.
   (a) Verificar que $\operatorname{Tr}_a \in E^*$ para todo $a \in E$.
   (b) Probar que si E/K es separable, entonces la aplicación $a \longmapsto \operatorname{Tr}_a$ es un isomorfismo de E en E^*.

Ejercicio 5. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado $[E : K] = q$. Probar que existe $\alpha \in E$ tal que $E = K[\alpha]$ y el coeficiente de grado $q - 1$ en $\operatorname{irr}(\alpha, K)$ es nulo.

Ejercicio 6.

1. Calcular el núcleo y la imagen del morfismo de grupos $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ dado por $x \longmapsto \operatorname{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(x)$.
2. Probar que en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ la norma no es inyectiva ni suryectiva.

Ejercicio 7. Sea K un cuerpo finito y sea L/K una extensión finita. Probar que la norma y la traza en L/K son suryectivas.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo de característica p y sea E/K una extensión de grado n, con $p \nmid n$. Sea $\alpha \in E$. Probar que si $\operatorname{Tr}_{E/K}(\alpha^i) = 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $\alpha = 0$.

Ejercicio 9. Sean $r, n \in \mathbb{N}$. Sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[r]{p_1}, \ldots, \sqrt[r]{p_n}]/\mathbb{Q}$ es de grado r^n y que $\sqrt[r]{p_1} + \ldots + \sqrt[r]{p_n}$ es un elemento primitivo.

Ejercicio 10. Sea E/K una extensión cíclica de grado $n = mr$, tal que $\exists\, c \in K^*$ con $c^r = \operatorname{N}_{E/K}(u)$ para algún $u \in E$. Sea L la única subextensión de grado r. Probar que existe $v \in L$ tal que $c = \operatorname{N}_{L/K}(v)$.