Algebra III

Primer recuperatorio - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Sea $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$.

1. Calcular $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Probar que $K/\mathbb{Q}$ es normal.
3. Calcular $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
4. ¿Cuales son las subextensiones de $K/\mathbb{Q}$?

Ejercicio 2. Sea $A = \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \, : \, \mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]\right\}$. Probar que A es un subanillo de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$ y sea E/K una extensión de grado 4. Probar que existe una subextensión $K \subseteq L \subseteq E$ con $[L : K] = 2$ si y solo si $E = K[\alpha]$ para algún $\alpha \in E$ raíz de un polinomio irreducible en $K[X]$ de la forma $X^4 + aX^2 + b$.

Ejercicio 4. Sea L un cuerpo de característica cero y H un grupo finito de automorfismos de L. Sea $E = L^H$ el subcuerpo de L fijado por H.

1. Probar que $\forall\, \alpha \in L$, α es algebraico sobre E y que $[E[\alpha] : E] \leqslant |H|$.
2. Deducir que $[L : E] \leqslant |H|$.
3. Concluir que L/E es normal y que $\mathrm{Gal}(L/E) = H$.

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión Galoisiana con $[E : K] = p^2q$, donde p y q son primos, $q < p$ y q no divide a $p^2 - 1$. Probar que:

1. Existen subextensiones L/K y M/K de grado p^2 y q respectivamente.
2. Tales subextensiones son Galoisianas.
3. El grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/K)$ es abeliano.