Algebra III

Segundo recuperatorio - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Sea $P \subseteq \mathbb{C}[X, Y]$ un ideal primo que no es maximal y $P \neq \{0\}$. Sea $A = \mathbb{C}[X, Y]/P$ y sea K el cuerpo de fracciones de A. Probar que $\mathrm{trdeg}(K/\mathbb{C}) = 1$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$ un polinomio de grado primo $p \in \mathbb{N}$. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que si $[E : K] = p\,t$ para algún $t \in \mathbb{N}$, entonces:

1. f es irreducible en $K[X]$.
2. Si $t > 1$, entonces E/K es separable.

Ejercicio 3. Probar que todo factor irreducible de $X^{2^n} + X + 1$ en $\mathbb{F}_2[X]$ tiene grado que divide a $2n$.

Ejercicio 4. Sea K un cuerpo perfecto de característica $p > 0$. Sean x trascendente sobre K, $E = K(x)$ y $u \in E \setminus K$. Probar que $E/K(u)$ es separable si y solo si $u \notin E^p$.

Ejercicio 5. Sean $r, s, t \in \mathbb{Z}$. ¿Existe un $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ de grado 3 sobre $\mathbb{Q}$ tal que:

$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha) = -1, \quad \mathrm{N}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha + 1) = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{N}_{\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}}(\alpha - 1) = -7\,?$$