

ÁLGEBRA III

Práctica 2 – Primer Cuatrimestre de 2007

Extensiones de cuerpos, polinomios minimales, elementos algebraicos y trascendentes

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K . Dada una subextensión F/K de E/K , probar que $f(x, F)$ divide a $f(x, K)$. Dar ejemplos con $f(x, F) = f(x, K)$ y con $f(x, F) \neq f(x, K)$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

- i) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$ ii) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ iii) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$
 iv) $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$ v) $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i])$ vi) $f(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$

Ejercicio 3. Calcular:

- i) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$
 ii) $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$

Ejercicio 4.

- i) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
 ii) Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$. Calcular $f(\alpha, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 5. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{3}}]$. Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A , con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea $K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ con la estructura de cuerpo del Ejercicio 11 de la Práctica 1.

- i) Calcular el polinomio minimal de cada uno de los elementos de K sobre su cuerpo primo.
 ii) Hallar todos los polinomios $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibles de grado 2 y probar que para cada uno de ellos se tiene que $\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 8. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle : K]$.

Ejercicio 9. Sea F/K una extensión de cuerpos de grado impar. Probar que si $F = K[u]$ entonces $F = K[u^2]$.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n : 6) = 1$, y sea F/\mathbb{Q} una subextensión de \mathbb{C}/\mathbb{Q} de grado n . Probar que $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$.

Ejercicio 11. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K . Probar que:

- i) Si $\text{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$, entonces $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$.
 ii) Si $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 12.

- i) Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Caracterizar las extensiones cuadráticas (i.e. de grado 2) de K .
- ii) Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de \mathbb{Z}_2 . Probar que no existe $b \in \mathbb{Z}_2[a]$ tal que $f(b, \mathbb{Z}_2) = X^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 13. Dado $b \in \mathbb{Q}$, sea a_b una raíz del polinomio $X^2 + bX + b^2$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[a_b]$ de \mathbb{Q} y determinar $[\mathbb{Q}[a_b] : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 14.

- i) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
- ii) Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.
- iii) Probar que $f(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

Ejercicio 15. Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$. Deducir que $\mathbb{Q}[\xi_5]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

Ejercicio 16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \notin \mathbb{Q}^p$.

- i) Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
- ii) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 17. Se define $\mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\mathbb{Q}_{\text{alg}}/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica que no es finita.

Ejercicio 18. Sea $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.

- i) (a) Probar que $\forall a \in \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]$ con $a \notin \mathbb{Q}$ y $a^2 \in \mathbb{Q}$, existen $b \in \mathbb{Q}$ y enteros $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tales que $a = b\sqrt{p_{i_1}} \dots \sqrt{p_{i_k}}$.
 (b) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}]$.
 (c) Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 de $\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]/\mathbb{Q}$.
- ii) Hallar $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{Q}]$.
- iii) ¿Existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$?
- iv) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Deducir $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 19. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

Ejercicio 20.

- i) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
- ii) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K .
- iii) Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a .

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo.

- i) Sea t trascendente sobre K . Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.
- ii) Sea $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean e_1, e_2, \dots, e_n números naturales. Calcular $[K(t_1, \dots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n})]$.

Ejercicio 22. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \text{gr}(f)$.**Ejercicio 23.** Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
- ii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K .
- iii) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x \cdot y$ es trascendente sobre K .
- iv) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .
- v) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K .

Ejercicio 24.

- i) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ (de hecho, vale la igualdad).
- ii) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.
 - (a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}] \rightarrow \mathbb{C}$ pero, en general, $f(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$.
 - (b) Considerar $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}, \xi_3]$. ¿Qué sucede en este caso?